Exercice 7

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Q. 1 *Montrer que si $\mathbb{A}$ admet une factorisation factorisation régulière de Cholesky alors $\mathbb{A}$ est hermitienne définie positive.*

R. 1

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admettant une factorisation régulière de Cholesky $\mathbb{A} = \mathbb{B}\mathbb{B}^*$ avec $\mathbb{B}$ est une matrice triangulaire inférieure inversible.
La matrice $\mathbb{A}$ est hermitienne car

$$\mathbb{A}^* = (\mathbb{B}\mathbb{B}^*)^* = (\mathbb{B}^*)^*\mathbb{B}^* = \mathbb{B}\mathbb{B}^* = \mathbb{A}.$$

Soit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}$, on a

$$\langle \mathbb{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = \langle \mathbb{B}\mathbb{B}^*\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = \langle \mathbb{B}^*\boldsymbol{x}, \mathbb{B}^*\boldsymbol{x} \rangle = \|\mathbb{B}^*\boldsymbol{x}\|^2 > 0$$

car $\mathbb{B}^*\boldsymbol{x} \neq 0$ ($\mathbb{B}^*$ inversible et $\boldsymbol{x} \neq 0$). Donc la matrice $\mathbb{A}$ est bien hermitienne définie positive.

Q. 2 *Montrer que si $\mathbb{A}$ est hermitienne définie positive alors elle admet une factorisation factorisation régulière de Cholesky.*

R. 2

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne définie positive.
D'après le Corollaire 3.1.2 de [2]/Corollaire 2.9 de [1], il existe alors une matrice $\mathbb{L} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire inférieure à diagonale unité et une matrice $\mathbb{D} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale à coefficient strictement positifs telles que

$$\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^*.$$

On note $\mathbb{H} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonale inversible vérifiant $\mathbb{H}^2 = \mathbb{D}$ (i.e. $H_{i,i} = \pm\sqrt{D_{i,i}} \neq 0$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$). On a alors

$$\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{H}\mathbb{H}\mathbb{L}^* = (\mathbb{L}\mathbb{H})(\mathbb{L}\mathbb{H})^*$$

En posant $\mathbb{B} = \mathbb{L}\mathbb{H}$, la matrice $\mathbb{B}$ est bien triangulaire inférieure inversible car produit d'une matrice triangulaire inférieure inversible par une matrice diagonale inversible et on a $\mathbb{A} = \mathbb{B}\mathbb{B}^*$.

Q. 3

On suppose que $\mathbb{A}$ est hermitienne définie positive.

a. *Montrer que $\mathbb{A}$ admet une factorisation positive de Cholesky.*

b. *Montrer que cette factorisation est unique.*

R. 3

a. En choisissant, dans la question précédente,

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad H_{i,i} = \sqrt{D_{i,i}} > 0,$$

la matrice $\mathbb{B} = \mathbb{L}\mathbb{H}$ triangulaire inférieure a alors pour éléments diagonaux

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad B_{i,i} = H_{i,i} > 0.$$

b. Montrons qu'une factorisation positive de Cholesky est unique. On propose ici deux démonstrations.

- **1ère démonstration.**
  Soient $\mathbb{B}_1$ et $\mathbb{B}_2$ deux factorisations positives de la matrice $\mathbb{A}$, on a donc

  $$\mathbb{A} = \mathbb{B}_1\mathbb{B}_1^* = \mathbb{B}_2\mathbb{B}_2^*.$$

  En multipliant à gauche par $\mathbb{B}_2^{-1}$ et à droite par $(\mathbb{B}_1^*)^{-1}$ cette équation on obtient

  $$\mathbb{B}_2^{-1}\mathbb{B}_1 = \mathbb{B}_2^*(\mathbb{B}_1^*)^{-1} = \mathbb{B}_2^*(\mathbb{B}_1^{-1})^* = (\mathbb{B}_1^{-1}\mathbb{B}_2)^*$$

  En notant $\mathbb{G} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{B}_2^{-1}\mathbb{B}_1$, on tire de l'équation précédente

  $$\mathbb{G} = (\mathbb{G}^{-1})^*. \tag{R7.1}$$

  Or, on a

- Proposition B.2.8 de [2]: l'inverse d'une matrice triangulaire inférieure à coefficients diagonaux réels strictement positifs est aussi une matrice triangulaire inférieure à coefficients diagonaux réels strictement positifs.
- Proposition B.2.7 de [2]: le produit de matrices triangulaires inférieures à coefficients diagonaux réels strictement positifs reste triangulaire inférieure à coefficients diagonaux réels strictement positifs.

On en déduit que les matrices $\mathbb{G} = \mathbb{B}_2^{-1}\mathbb{B}_1$ et $\mathbb{G}^{-1} = \mathbb{B}_1^{-1}\mathbb{B}_2$ sont triangulaires inférieures à coefficients diagonaux réels strictement positifs.

De plus l'équation (R7.1) identifie la matrice triangulaire inférieure $\mathbb{G}$ à la matrice triangulaire supérieure $(\mathbb{G}^{-1})^*$: ce sont donc des matrices diagonales à coefficients diagonaux réels strictement positifs et on en déduit

$$(\mathbb{G}^{-1})^* = \mathbb{G}^{-1}$$

et

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \left(\mathbb{G}^{-1}\right)_{i,i} = \frac{1}{\mathbb{G}_{i,i}} > 0.$$

De l'équation (R7.1), on obtient alors $\mathbb{G} = \mathbb{G}^{-1}$ et donc

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \mathbb{G}_{i,i} = \frac{1}{\mathbb{G}_{i,i}} > 0.$$

On en déduit alors que $\mathbb{G} = \mathbb{I}$ et donc

$$\mathbb{B}_2^{-1}\mathbb{B}_1 = \mathbb{I}$$

c'est à dire $\mathbb{B}_2^{-1}$ est l'inverse de $\mathbb{B}_1$ qui est unique, donc $\mathbb{B}_1 = \mathbb{B}_2$.

- **2ème demonstration.**

Soient $\mathbb{B}$ et $\mathbb{C}$ deux factorisations positives de la matrice $\mathbb{A}$, on a donc

$$\mathbb{A} = \mathbb{B}\mathbb{B}^* = \mathbb{C}\mathbb{C}^*.$$

En multipliant à gauche par $\mathbb{C}^{-1}$ et à droite par $(\mathbb{B}^*)^{-1}$ cette équation, on obtient

$$\mathbb{C}^{-1}\mathbb{B} = \mathbb{C}^*(\mathbb{B}^*)^{-1} = \mathbb{C}^*(\mathbb{B}^{-1})^* = (\mathbb{B}^{-1}\mathbb{C})^* \tag{R7.2}$$

Or, on a

- Proposition B.2.8 de [2]: Soit $\mathbb{T} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire inférieure inversible (ses coefficient diagonaux sont non nuls). Son inverse est aussi triangulaire inférieure et, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{T}^{-1}_{i,i} = \frac{1}{\mathbb{T}_{i,i}}$.
  On en déduit que les matrices $\mathbb{B}^{-1}$ et $\mathbb{C}^{-1}$ sont triangulaires inférieures à coefficients diagonaux réels strictement positifs.
- Proposition B.2.7 de [2]: Soient $\mathbb{T} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\mathbb{L} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaires inférieures. Alors $\mathbb{T}\mathbb{L}$ est triangulaire inférieure et, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $(\mathbb{T}\mathbb{L})_{i,i} = \mathbb{T}_{i,i}\mathbb{L}_{i,i}$.
  On en déduit que les matrices $\mathbb{C}^{-1}\mathbb{B}$ et $\mathbb{B}^{-1}\mathbb{C}$ sont triangulaires inférieures à coefficients diagonaux réels strictement positifs.

De plus l'équation (R7.2) identifie la matrice triangulaire inférieure $\mathbb{C}^{-1}\mathbb{B}$ à la matrice triangulaire supérieure $(\mathbb{B}^{-1}\mathbb{C})^*$: ce sont donc des matrices diagonales à coefficients diagonaux réels strictement positifs. On en déduit, $\forall i \in [\![1, n]\!]$,

$$\left(\mathbb{C}^{-1}\mathbb{B}\right)_{i,i} = \left((\mathbb{B}^{-1}\mathbb{C})^*\right)_{i,i} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{C}^{-1}_{i,i}\mathbb{B}_{i,i} = \overline{\mathbb{B}^{-1}_{i,i}\mathbb{C}_{i,i}}$$

Comme les coefficients diagonaux sont réels, on obtient

$$\mathbb{C}^{-1}_{i,i}\mathbb{B}_{i,i} = \mathbb{B}^{-1}_{i,i}\mathbb{C}_{i,i}$$

ce qui est équivalent à

$$\mathbb{B}^2_{i,i} = \mathbb{C}^2_{i,i}.$$

Or les coefficients diagonaux sont strictement positifs donc, on obtient

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \mathbb{B}_{i,i} = \mathbb{C}_{i,i}.$$

On en déduit que les coefficients diagonaux des matrices diagonales $\mathbb{C}^{-1}\mathbb{B}$ et $(\mathbb{B}^{-1}\mathbb{C})^*$ vérifient

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \left(\mathbb{C}^{-1}\mathbb{B}\right)_{i,i} = \left((\mathbb{B}^{-1}\mathbb{C})^*\right)_{i,i} = 1.$$

Elles s'identifient donc à la matrice identité et on a alors $\mathbb{B} = \mathbb{C}$. Ce qui démontre l'unicité.

References

[1] F. Cuvelier. Analyse numérique I, résolution de systèmes linéaires, méthodes directes, résumé. fichier pdf, https://www.math.univ-paris13.fr/~cuvelier/docs/Enseignements/MACS1/AnaNumI/25-26/resume_RSLdirecte.pdf.

[2] F. Cuvelier. *Analyse numérique élémentaire (version du 29 sep. 2025)*. Polycopié (téléchargement), 2025.