Exercice 6

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Q. 1

Montrer que s'il existe $\mathbb{L} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, matrice triangulaire inférieure à diagonale unité, et, $\mathbb{D} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs, telle que $\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^*$ alors $\mathbb{A}$ est hermitienne définie positive.

R. 1

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admettant une factorisation $\mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^*$ avec $\mathbb{L} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, matrice triangulaire inférieure à diagonale unité, et, $\mathbb{D} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, matrice diagonale à coeffcients diagonaux strictement positifs.
La matrice $\mathbb{A}$ est alors hermitienne car

$$\mathbb{A}^* = (\mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^*)^* = (\mathbb{L}^*)^*\mathbb{D}^*\mathbb{L}^* = \mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^*.$$

De plus $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}$ on a

$$\langle \mathbb{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = \langle \mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^*\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = \langle \mathbb{D}\mathbb{L}^*\boldsymbol{x}, \mathbb{L}^*\boldsymbol{x} \rangle$$

On pose $\boldsymbol{y} = \mathbb{L}^*\boldsymbol{x} \neq 0$ car $\boldsymbol{x} \neq 0$ et $\mathbb{L}^*$ inversible. On obtient alors

$$\langle \mathbb{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = \langle \mathbb{D}\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} D_{i,i}|y_i|^2 > 0$$

car $\mathbb{D}$ diagonale, $D_{i,i} > 0$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$ et $\boldsymbol{y} \neq 0$.
La matrice hermitienne $\mathbb{A}$ est donc bien définie positive.

Q. 2

Montrer que si $\mathbb{A}$ est hermitienne définie positive alors il existe $\mathbb{L} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, matrice triangulaire inférieure à diagonale unité, et, $\mathbb{D} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs, telle que $\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^*$.

R. 2

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne définie positive.
D'après le Corollaire 3.1.1 de [2]/Corollaire 2.6 de [1], la matrice $\mathbb{A}$ admet une unique factorisation $\mathbb{LU}$.
D'après le Théorème 3.1.6 de [2]/Théorème 2.8 de [1], la matrice hermitienne $\mathbb{A}$ peut alors s'écrire sous la forme $\mathbb{A} = \mathbb{LDL}^*$ où $\mathbb{D}$ est diagonale à coefficients réels et $\mathbb{L}$ triangulaire inférieure à diagonale unité.
Il reste à démontrer que $D_{i,i} > 0$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$.
Comme $\mathbb{A}$ est définie positive, on a $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}$, $\langle \mathbb{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle > 0$. Or on a

$$\langle \mathbb{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = \langle \mathbb{LDL}^*\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = \langle \mathbb{DL}^*\boldsymbol{x}, \mathbb{L}^*\boldsymbol{x} \rangle$$

On note $\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$, la base canonique de $\mathbb{C}^n$ et on rappelle que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\langle \mathbb{D}\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_i \rangle = D_{i,i}$. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. En choisissant $\boldsymbol{x} = (\mathbb{L}^*)^{-1}\boldsymbol{e}_i \neq 0$, on obtient alors

$$\langle \mathbb{DL}^*\boldsymbol{x}, \mathbb{L}^*\boldsymbol{x} \rangle = \langle \mathbb{D}\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_i \rangle = D_{i,i} > 0.$$

References

[1] F. Cuvelier. Analyse numérique I, résolution de systèmes linéaires, méthodes directes, résumé. fichier pdf, `https://www.math.univ-paris13.fr/~cuvelier/docs/Enseignements/MACS1/AnaNumI/25-26/resume_RSLdirecte.pdf`.

[2] F. Cuvelier. *Analyse numérique élémentaire (version du 29 sep. 2025)*. Polycopié (téléchargement), 2025.