

Proposition 1. Soit \mathbb{A} une matrice régulière. On a les propriétés suivantes

a. $\forall \alpha \in \mathbb{K}^*, \text{cond}(\alpha \mathbb{A}) = \text{cond}(\mathbb{A})$.

b. $\text{cond}_p(\mathbb{A}) \geq 1, \forall p \in \llbracket 1, +\infty \rrbracket$.

c. $\text{cond}_2(\mathbb{A}) = 1$ si et seulement si $\mathbb{A} = \alpha \mathbb{Q}$ avec $\alpha \in \mathbb{K}^*$ et \mathbb{Q} matrice unitaire

Proof. Soit \mathbb{A} une matrice régulière.

a. Soit $\alpha \in \mathbb{K}^*$, on a

$$\begin{aligned} \text{cond}(\alpha \mathbb{A}) &\stackrel{\text{def}}{=} \|\alpha \mathbb{A}\| \|(\alpha \mathbb{A})^{-1}\| = |\alpha| \|\mathbb{A}\| \left\| \frac{1}{\alpha} \mathbb{A}^{-1} \right\| \\ &= |\alpha| \|\mathbb{A}\| \frac{1}{|\alpha|} \|\mathbb{A}^{-1}\| = \|\mathbb{A}\| \|\mathbb{A}^{-1}\| \\ &= \text{cond}(\mathbb{A}) \end{aligned}$$

b. On a $\mathbb{I} = \mathbb{A} \mathbb{A}^{-1}$. Or pour toute norme subordonnée, on a $\|\mathbb{I}\| = 1$ et donc $1 = \|\mathbb{A} \mathbb{A}^{-1}\| \leq \|\mathbb{A}\| \|\mathbb{A}^{-1}\| = \text{cond}(\mathbb{A})$.

c. **Admis.** Voir par exemple *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur (2004)*, Lascaux, P. et Théodor, R., Tome 1, Théorème 2 page 142-143.

□



References

- [1] F. Cuvelier. Analyse numérique I, résolution de systèmes linéaires, méthodes directes, résumé. fichier pdf, https://www.math.univ-paris13.fr/~cuvelier/docs/Enseignements/MACS1/AnaNumI/25-26/resume_RSLdirecte.pdf.

[2] F. Cuvelier. *Analyse numérique élémentaire (version du 29 sep. 2025)*. Polycopié (téléchargement), 2025.