

EXERCICE 2

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne inversible décomposée en $A = M - N$ où M est inversible. On note $B = I - M^{-1}A$.

Q. 1

Montrer que la matrice $M^* + N$ est hermitienne.

R. 1

On a

$$\begin{aligned} (M^* + N)^* &= M + N^* \\ &= A + N + N^* = A^* + N + N^* \quad \text{car } A \text{ est hermitienne} \\ &= M^* + N. \end{aligned}$$

La matrice $M^* + N$ est donc hermitienne.

On suppose maintenant que $M^* + N$ est définie positive.

Q. 2

Soit x un vecteur quelconque de \mathbb{C}^n et $y = Bx$.

a. Montrer que

$$\langle x, Ax \rangle - \langle y, Ay \rangle = \langle x, AM^{-1}Ax \rangle + \langle M^{-1}Ax, Ax \rangle - \langle M^{-1}Ax, AM^{-1}Ax \rangle \quad (\text{P-1})$$

et

$$x - y = M^{-1}Ax. \quad (\text{P-2})$$

b. En déduire que

$$\langle x, Ax \rangle - \langle y, Ay \rangle = \langle (x - y), (M^* + N)(x - y) \rangle. \quad (\text{P-3})$$

a. On a $\mathbf{y} = \mathbb{B}\mathbf{x}$ avec $\mathbb{B} = \mathbb{I} - \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}$ ce qui donne

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbb{B}\mathbf{x} = (\mathbb{I} - \mathbb{B})\mathbf{x} = \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x}.$$

L'équation (P-2) est donc démontrée. Pour prouver (P-1), on note que

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x}$$

et donc

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{y}, \mathbb{A}\mathbf{y} \rangle &= \langle \mathbf{x} - \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbb{A}(\mathbf{x} - \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x}) \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbb{A}\mathbf{x} \rangle - \langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbb{A}\mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbb{A}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x} \rangle + \langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbb{A}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x} \rangle. \end{aligned}$$

On en déduit immédiatement (P-1).

b. En utilisant (P-2), on obtient

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, (\mathbb{M}^* + \mathbb{N})(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \rangle &= \langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x}, (\mathbb{M}^* + \mathbb{N})\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x} \rangle \\ &= \langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x}, (\mathbb{M} + \mathbb{N}^*)\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x} \rangle \quad \text{car } \mathbb{M}^* + \mathbb{N} \text{ hermitienne} \\ &= \langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x}, (\mathbb{M} + \mathbb{M}^* - \mathbb{A}^*)\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x} \rangle \quad \text{car } \mathbb{N} = \mathbb{M} - \mathbb{A} \\ &= \langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbb{A}\mathbf{x} \rangle + \langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbb{M}^*\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x} \rangle - \langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbb{A}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x} \rangle \quad \text{car } \mathbb{A} \text{ hermitienne} \end{aligned}$$

Or, par propriété du produit scalaire, on a

$$\langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbb{M}^*\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x} \rangle = \langle \mathbb{M}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x} \rangle = \langle \mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbb{A}^*\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x} \rangle.$$

Comme \mathbb{A} est hermitienne, on obtient

$$\langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbb{M}^*\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbb{A}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x} \rangle.$$

On abouti alors à

$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, (\mathbb{M}^* + \mathbb{N})(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \rangle = \langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbb{A}\mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbb{A}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x} \rangle - \langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbb{A}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x} \rangle.$$

L'équation (P-3) est obtenue en utilisant (P-1).

Q. 3

Montrer que si \mathbb{A} est définie positive alors $\rho(\mathbb{B}) < 1$.

R. 3

On veut démontrer que sous les hypothèses \mathbb{A} hermitienne définie positive et $\mathbb{M}^* + \mathbb{N}$ (hermitienne) définie positive on a $\rho(\mathbb{B}) < 1$, c'est à dire que pour tout élément propre (λ, \mathbf{u}) de \mathbb{B} alors $|\lambda| < 1$.

Soit $(\lambda, \mathbf{u}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ un élément propre de \mathbb{B} . On a $\mathbb{B}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$. En prenant $\mathbf{x} = \mathbf{u}$ dans Q.2, on a $\mathbf{y} = \mathbb{B}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$ et donc $\mathbf{x} - \mathbf{y} = (1 - \lambda)\mathbf{u}$. De (P-3) on obtient

$$\langle \mathbf{u}, \mathbb{A}\mathbf{u} \rangle - \langle \lambda\mathbf{u}, \lambda\mathbb{A}\mathbf{u} \rangle = \langle (1 - \lambda)\mathbf{u}, (\mathbb{M}^* + \mathbb{N})((1 - \lambda)\mathbf{u}) \rangle$$

c'est à dire

$$(1 - |\lambda|^2) \langle \mathbf{u}, \mathbb{A}\mathbf{u} \rangle = |1 - \lambda|^2 \langle \mathbf{u}, (\mathbb{M}^* + \mathbb{N})\mathbf{u} \rangle. \quad (\text{R2.1})$$

On va montrer que $|1 - \lambda| > 0$, c'est à dire $\lambda \neq 1$. Pour celà on effectue une démonstration par l'absurde.

Par l'absurde on suppose $\lambda = 1$. Dans ce cas, comme $\mathbb{B}\mathbf{u} = \mathbf{u}$, on a $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. De (P-2), on déduit alors $\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ et comme \mathbb{A} et \mathbb{M}^{-1} sont inversibles $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Or $\mathbf{x} = \mathbf{u}$ est un vecteur propre de \mathbb{B} , il ne peut donc être nul! On a une contradiction et donc, l'hypothèse de départ est fausse: on a démontré que $\lambda \neq 1$.

Comme par hypothèse, la matrice $\mathbb{M}^* + \mathbb{N}$ (hermitienne) est définie positive et $\mathbf{u} \neq 0$, on obtient

$$|1 - \lambda|^2 \langle \mathbf{u}, (\mathbb{M}^* + \mathbb{N})\mathbf{u} \rangle > 0.$$

On déduit alors de (R2.1) que

$$(1 - |\lambda|^2) \langle \mathbf{u}, \mathbb{A}\mathbf{u} \rangle > 0.$$

Comme \mathbb{A} est hermitienne définie positive et $\mathbf{u} \neq 0$, on a

$$\langle \mathbf{u}, \mathbb{A}\mathbf{u} \rangle > 0$$

et donc $1 - |\lambda|^2 > 0$, c'est à dire $|\lambda| < 1$.

On suppose $\rho(\mathbb{B}) < 1$ et on va démontrer, par l'absurde, que \mathbb{A} est définie positive.

Q. 4

On suppose qu'il existe $\mathbf{x}^{[0]} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tel que $\alpha_0 \stackrel{\text{def}}{=} \langle \mathbf{x}^{[0]}, \mathbb{A}\mathbf{x}^{[0]} \rangle \in \mathbb{C} \setminus]0, +\infty[$. On définit alors les suites

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbf{x}^{[k]} = \mathbb{B}\mathbf{x}^{[k-1]} \quad \text{et} \quad \alpha_k = \langle \mathbf{x}^{[k]}, \mathbb{A}\mathbf{x}^{[k]} \rangle.$$

a. Montrer que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{x}^{[k]} = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \alpha_k = 0.$$

b. Montrer que $\alpha_0 \in]-\infty, 0]$.

c. Démontrer par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ que

$$(\mathcal{P}_k) : \mathbf{x}^{[k]} \neq \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}^{[k]} - \mathbf{x}^{[k-1]} \neq \mathbf{0}, \quad \text{et} \quad 0 \geq \alpha_{k-1} > \alpha_k.$$

d. Conclure.

R. 4

a. On a alors

$$\mathbf{x}^{[k]} = \mathbb{B}^k \mathbf{x}^{[0]}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

D'après le Théorème 3.2.5, page 106,

$$\rho(\mathbb{B}) < 1 \iff \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{B}^k \mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n.$$

On a donc

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{x}^{[k]} = \mathbf{0}.$$

Comme l'application $\mathbf{x} \mapsto \langle \mathbf{x}, \mathbb{A}\mathbf{x} \rangle$ est continue, on en déduit

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \alpha_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} \langle \mathbf{x}^{[k]}, \mathbb{A}\mathbf{x}^{[k]} \rangle = 0.$$

- b. Pour une matrice quelconque $\langle \mathbf{x}, \mathbb{A}\mathbf{x} \rangle \in \mathbb{C}$, or \mathbb{A} étant hermitienne, on a $\langle \mathbf{x}, \mathbb{A}\mathbf{x} \rangle \in \mathbb{R}$. En effet, par propriété du produit scalaire on a

$$\langle \mathbf{x}, \mathbb{A}\mathbf{x} \rangle = \langle \mathbb{A}^* \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbb{A}\mathbf{x} \rangle}.$$

Comme par hypothèse $\alpha_0 \in \mathbb{C} \setminus]0, +\infty[$, on en déduit $\alpha_0 \in]-\infty, 0]$.

- c. Tout d'abord de l'égalité (P-3) avec $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{[k-1]}$ et $\mathbf{y} = \mathbb{B}\mathbf{x} = \mathbf{x}^{[k]}$ on obtient

$$\langle \mathbf{x}^{[k-1]}, \mathbb{A}\mathbf{x}^{[k-1]} \rangle - \langle \mathbf{x}^{[k]}, \mathbb{A}\mathbf{x}^{[k]} \rangle = \langle (\mathbf{x}^{[k-1]} - \mathbf{x}^{[k]}), (\mathbb{M}^* + \mathbb{N})(\mathbf{x}^{[k-1]} - \mathbf{x}^{[k]}) \rangle$$

- **Initialisation** : montrons que (\mathcal{P}_0) est vérifiée.

On a $\mathbf{x}^{[0]} \neq 0$ et $\mathbf{x}^{[1]} = \mathbb{B}\mathbf{x}^{[0]}$.

On montre par l'absurde que $\mathbf{x}^{[1]} \neq 0$. Supposons $\mathbf{x}^{[1]} = 0$, alors $\alpha_1 = 0$ et $\mathbf{x}^{[0]} - \mathbf{x}^{[1]} = \mathbf{x}^{[0]} \neq 0$. Comme $\mathbb{M}^* + \mathbb{N}$ est hermitienne définie positive on obtient

$$\alpha_0 - \alpha_1 = \langle (\mathbf{x}^{[0]} - \mathbf{x}^{[1]}), (\mathbb{M}^* + \mathbb{N})(\mathbf{x}^{[0]} - \mathbf{x}^{[1]}) \rangle > 0$$

et contradiction avec $\alpha_0 \leq 0$.

On montre ensuite par l'absurde que $\mathbf{x}^{[0]} \neq \mathbf{x}^{[1]}$. Supposons $\mathbf{x}^{[1]} = \mathbf{x}^{[0]}$. Par construction $\mathbf{x}^{[1]} = \mathbb{B}\mathbf{x}^{[0]}$, et dans ce cas, comme $\mathbf{x}^{[0]} \neq 0$, $(1, \mathbf{x}^{[0]})$ serait un élément propre de \mathbb{B} : contradiction avec $\rho(\mathbb{B}) < 1$.

Comme $\mathbf{x}^{[0]} - \mathbf{x}^{[1]} \neq 0$, on a

$$\alpha_0 - \alpha_1 = \langle (\mathbf{x}^{[0]} - \mathbf{x}^{[1]}), (\mathbb{M}^* + \mathbb{N})(\mathbf{x}^{[0]} - \mathbf{x}^{[1]}) \rangle > 0$$

et donc $0 \geq \alpha_0 > \alpha_1$.

- **Hérédité** : soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose (\mathcal{P}_k) vérifiée. On a alors $\mathbf{x}^{[k]} \neq 0$, $\mathbf{x}^{[k+1]} = \mathbb{B}\mathbf{x}^{[k]}$ et $\alpha_k \leq 0$.

On montre par l'absurde que $\mathbf{x}^{[k+1]} \neq 0$. Supposons $\mathbf{x}^{[k+1]} = 0$, alors $\alpha_{k+1} = 0$ et $\mathbf{x}^{[k]} - \mathbf{x}^{[k+1]} = \mathbf{x}^{[k]} \neq 0$.

Comme $\mathbb{M}^* + \mathbb{N}$ est hermitienne définie positive on obtient

$$\alpha_k - \alpha_{k+1} = \langle (\mathbf{x}^{[k]} - \mathbf{x}^{[k+1]}), (\mathbb{M}^* + \mathbb{N})(\mathbf{x}^{[k]} - \mathbf{x}^{[k+1]}) \rangle > 0$$

et contradiction avec $\alpha_k \leq 0$.

On montre ensuite par l'absurde que $\mathbf{x}^{[k]} \neq \mathbf{x}^{[k+1]}$. Supposons $\mathbf{x}^{[k+1]} = \mathbf{x}^{[k]}$. Par construction $\mathbf{x}^{[k+1]} = \mathbb{B}\mathbf{x}^{[k]}$, et dans ce cas, comme $\mathbf{x}^{[k]} \neq 0$, $(1, \mathbf{x}^{[k]})$ serait un élément propre de \mathbb{B} : contradiction avec $\rho(\mathbb{B}) < 1$. Comme $\mathbf{x}^{[k]} - \mathbf{x}^{[k+1]} \neq 0$, on a

$$\alpha_k - \alpha_{k+1} = \left\langle (\mathbf{x}^{[k]} - \mathbf{x}^{[k+1]}), (\mathbb{M}^* + \mathbb{N})(\mathbf{x}^{[k]} - \mathbf{x}^{[k+1]}) \right\rangle > 0$$

et donc $0 \geq \alpha_k > \alpha_{k+1}$.

- **Conclusion** : la proposition est vérifiée pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

- d. La suite $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est donc strictement décroissante de premier terme $\alpha_0 \leq 0$: elle ne peut converger vers 0. On a donc une contradiction avec l'hypothèse initiale, \mathbb{A} hermitienne non définie positive

