

EXERCICE 1

Soit \mathbb{A} une matrice inversible décomposée sous la forme $\mathbb{A} = \mathbb{M} - \mathbb{N}$ avec \mathbb{M} inversible. On pose

$$\mathbb{B} = \mathbb{M}^{-1}\mathbb{N} \quad \text{et} \quad \mathbf{c} = \mathbb{M}^{-1}\mathbf{b}.$$

Montrer que la suite définie par

$$\mathbf{x}^{[0]} \in \mathbb{K}^n \quad \text{et} \quad \mathbf{x}^{[k+1]} = \mathbb{B}\mathbf{x}^{[k]} + \mathbf{c}$$

converge vers $\bar{\mathbf{x}} = \mathbb{A}^{-1}\mathbf{b}$ quelque soit $\mathbf{x}^{[0]}$ si et seulement si $\rho(\mathbb{B}) < 1$.

Correction On rappelle tout d'abord le Théorème 3.2.5, page 106:

Théorème. Soit \mathbb{B} une matrice carrée. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- a. $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{B}^k = 0$,
- b. $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{B}^k \mathbf{v} = 0$ pour tout vecteur \mathbf{v} ,
- c. $\rho(\mathbb{B}) < 1$,
- d. $\|\mathbb{B}\| < 1$ pour au moins une norme matricielle subordonnée $\|\bullet\|$.

Comme $\bar{\mathbf{x}} = \mathbb{A}^{-1}\mathbf{b}$ (sans présupposer de la convergence) on a

$$\mathbb{A}\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{b} \iff \mathbb{M}\bar{\mathbf{x}} = \mathbb{N}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{b}$$

et, comme \mathbb{M} est inversible

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbb{M}^{-1}\mathbb{N}\bar{\mathbf{x}} + \mathbb{M}^{-1}\mathbf{b} = \mathbb{B}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{c}$$

On obtient donc

$$\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^{[k+1]} = \mathbb{B}(\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^{[k]})$$

Or la suite $\mathbf{x}^{[k]}$ converge vers $\bar{\mathbf{x}}$ si et seulement si la suite $\mathbf{e}^{[k]} \stackrel{\text{def}}{=} \bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^{[k]}$ converge vers $\mathbf{0}$. On a

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{e}^{[k]} = \mathbb{B}^k \mathbf{e}^{[0]}.$$

D'après le théorème cité, on a $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{B}^k \mathbf{e}^{[0]} = 0$, $\forall \mathbf{e}^{[0]} \in \mathbb{K}^n$ si et seulement si $\rho(\mathbb{B}) < 1$.

◇

