

**Théorème : *Théorème du point fixe dans  $\mathbb{R}$  (application  $\mathcal{C}^1$***

Soient  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle fermé, non vide, et  $\Phi \in \mathcal{C}^1(I)$  vérifiant  $\Phi(I) \subset I$  et

$$\exists L < 1 \text{ tel que } \forall x \in I, |\Phi'(x)| \leq L, \quad (\text{P-1})$$

Soit  $x_0 \in I$  et  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ . On a alors

- a. la fonction  $\Phi$  admet un unique point fixe  $\alpha \in I$ ,
- b.  $\forall k \in \mathbb{N}, x_k \in I$ ,
- c. la suite  $(x_k)$  converge vers  $\alpha$  avec un ordre 1 au moins.
- d. Si  $x_0 \neq \alpha$ , alors

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{x_k - \alpha} = \Phi'(\alpha). \quad (\text{P-2})$$

et, si  $\Phi'(\alpha) \neq 0$ , la convergence est d'ordre 1 (exactement).

*Proof.* Pour démontrer les trois premiers points il suffit de montrer que (P-1) entraîne que  $\Phi$  est contractante sur  $I$  pour pouvoir appliquer le théorème 1.2.

En effet, soit  $(x, y) \in I^2, x \neq y$ . D'après le théorème des accroissements finis, il existe  $\xi \in ]\min(x, y), \max(x, y)[$  tel que

$$\frac{\Phi(x) - \Phi(y)}{x - y} = \Phi'(\xi).$$

Ce résultat s'obtient aussi par un développement de Taylor. On obtient alors

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| = |x - y| |\Phi'(\xi)| \leq L|x - y|.$$

L'application  $\Phi$  est donc contractante sur  $I$  et le théorème 1.2 s'applique.

Pour le dernier point, on remarque tout d'abord que si  $x_0 \neq \alpha$ , alors  $\forall k \in \mathbb{N}, x_k \neq \alpha$ . Ensuite, on utilise la définition de la suite et du point fixe  $\alpha$ :

$$x_{k+1} - \alpha = \Phi(x_k) - \Phi(\alpha).$$

On utilise le théorème des accroissements finis pour obtenir:  $\exists \xi_k \in ]\min(x_k, \alpha), \max(x_k, \alpha)[$  tel que

$$\frac{\Phi(x_k) - \Phi(\alpha)}{x_k - \alpha} = \Phi'(\xi_k).$$

Quand  $k \rightarrow +\infty$ , on a  $x_k \rightarrow \alpha$  et donc  $\xi_k \rightarrow \alpha$ . Par continuité de la fonction  $\Phi'$  on obtient (P-2).

Pour démontrer que la convergence est d'ordre 1 (exactement) si  $\Phi'(\alpha) \neq 0$ , on va multiplier l'équation précédente par  $(x_k - \alpha)^{-\varepsilon}$  avec  $\varepsilon > 0$  pour obtenir

$$\frac{\Phi(x_k) - \Phi(\alpha)}{(x_k - \alpha)^{1+\varepsilon}} = (x_k - \alpha)^{-\varepsilon} \Phi'(\xi_k).$$

Or  $|x - \alpha|^{-\varepsilon} \xrightarrow{x \rightarrow \alpha} +\infty$ , et  $\phi'(x) \xrightarrow{x \rightarrow \alpha} \phi'(\alpha) \neq 0$ , ce qui entraine

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|^{1+\varepsilon}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} |x_k - \alpha|^{-\varepsilon} |\phi'(\xi_k)| = +\infty.$$

Donc,  $\forall \varepsilon > 0$ , la convergence n'est pas d'ordre  $1 + \varepsilon$ . Elle est donc d'ordre 1 (exactement). □

