

## EXERCICE 4

Soient  $[a, b]$  un intervalle non vide de  $\mathbb{R}$  et  $\phi$  une fonction continue de  $[a, b]$  dans lui même ( $\phi([a, b]) \subset [a, b]$ ). Soit  $x_0 \in [a, b]$ . On considère la suite  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  donnée par

$$x_{k+1} = \phi(x_k) \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (\text{P-1})$$

**Q. 1** Montrer que la suite (P-1) est bien définie ( $x_k$  existe pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ).

**R. 1** La suite  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , est bien définie si la relation (P-1) permet de définir complètement (et de manière unique) l'ensemble des termes de la suite  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , connaissant  $x_0$ .

Dans le cas présent, il faut s'assurer que  $x_k \in [a, b]$  pour tout entier  $k$  car la fonction  $\phi$  n'est par hypothèse définie que sur  $[a, b]$ . En effet, si  $x_k$  n'appartient pas à l'intervalle  $[a, b]$ , alors on ne peut pas définir  $x_{k+1}$  puisque  $\phi(x_k)$  n'existe pas.

Nous montrons ce résultat par récurrence :

- Initialisation pour  $k = 0$ . Par hypothèse,  $x_0 \in [a, b]$ .
- Hérédité: nous supposons que  $x_k \in [a, b]$  et nous allons montrer que  $x_{k+1} \in [a, b]$ . Par définition,  $x_{k+1} = \phi(x_k)$ . Puisque par hypothèse,  $\phi([a, b]) \subset [a, b]$ , on en déduit immédiatement que  $x_{k+1} \in [a, b]$ .

**Remarque.** hypothèse importante :  $\phi([a, b]) \subset [a, b]$ .

**Q. 2** Montrer que si la suite (P-1) converge, alors elle converge vers un point fixe de  $\phi$ .

R. 2

Supposons que la suite  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers une limite notée  $\bar{x}$ .  $\bar{x} \in [a, b]$  car  $[a, b]$  est un intervalle fermé. Par ailleurs, en utilisant la continuité de  $\phi$ , on a

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \phi(x_k) = \phi(\bar{x}).$$

Par les théorème de comparaison des limites et la relation (P-1), on a:

$$\bar{x} = \lim_{k \rightarrow +\infty} x_{k+1} \overset{(P-1)}{=} \lim_{k \rightarrow +\infty} \phi(x_k) = \phi(\bar{x}).$$

Ainsi  $\bar{x} = \phi(\bar{x})$  et donc  $\bar{x}$  est un point fixe de  $\phi$ .

**Remarque.** *hypothèses importantes :  $[a, b]$  est fermé et  $\phi$  est continue sur  $[a, b]$ .*

Q. 3

*Existence du point fixe : montrer qu'il existe  $\alpha \in [a, b]$  tel que  $\phi(\alpha) = \alpha$ .*

R. 3

On considère la fonction  $g$  définie par  $g(x) = \phi(x) - x$ . Comme  $\phi([a, b]) \subset [a, b]$ ,

$$g(a) = \phi(a) - a \geq a - a \geq 0.$$

De manière similaire,

$$g(b) = \phi(b) - b \leq b - b \leq 0.$$

Puisque  $\phi$  est continue sur  $[a, b]$ , le théorème des valeurs intermédiaires (ou Bolzano) (sur  $[a, b]$ ,  $\phi$  prend toutes les valeurs entre  $\phi(a)$  et  $\phi(b)$ ) garantit l'existence d'un nombre  $\alpha \in [a, b]$  tel que  $g(\alpha) = 0$ . Or

$$0 = g(\alpha) = \phi(\alpha) - \alpha,$$

donc  $\alpha$  est un point fixe de  $\phi$ .

**Remarque.** L'hypothèse de continuité de  $\phi$  est cruciale. Le résultat est faux si  $\phi$  n'est pas continue.

On peut par exemple considérer la fonction  $\phi_0 : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$  telle que  $\phi_0(x) = \frac{1}{2}$  si  $-1 \leq x \leq 0$ , et  $\phi_0(x) = -\frac{1}{2}$  si  $0 < x \leq 1$ , qui n'admet pas de point fixe sur  $[-1, 1]$  (voir Figure 1).

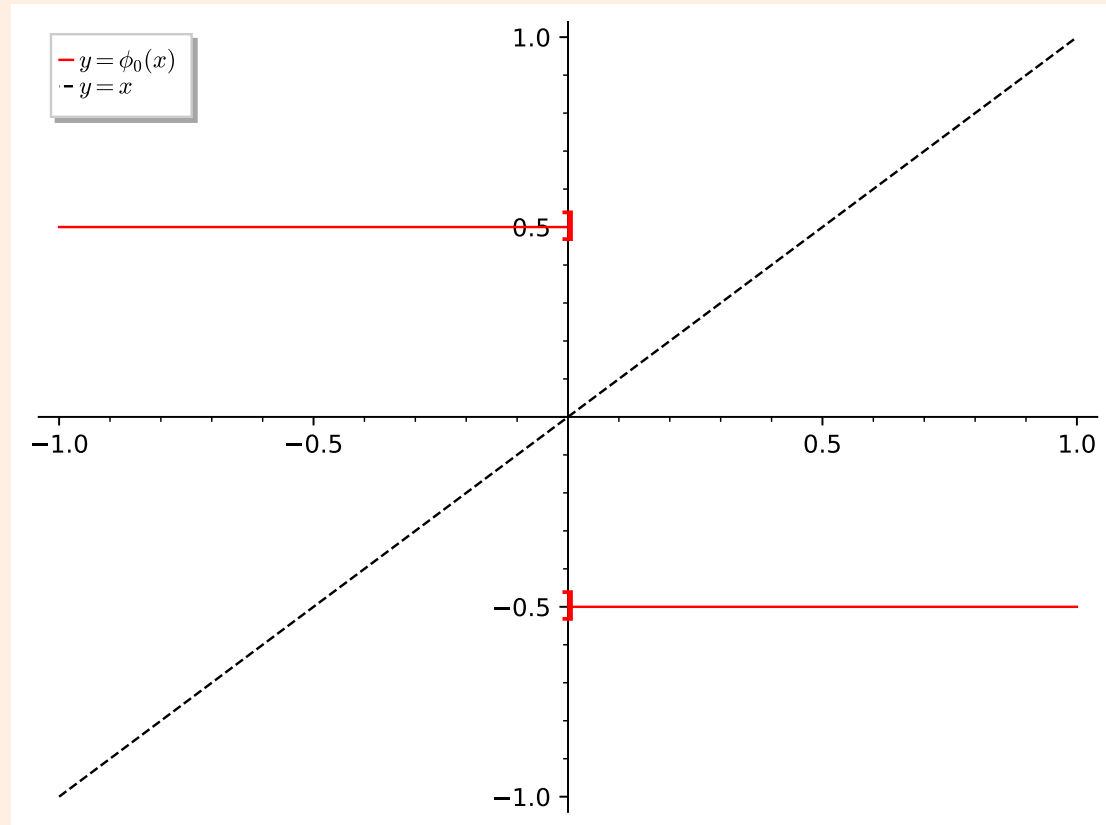


Figure 1: Graphe représentatif de la fonction  $\phi_0$  et de la droite  $y = x$

On pourra aussi remarquer qu'il n'y a pas forcément unicité du point fixe. En effet, la fonction  $\phi$  définie par  $\phi(x) = x$ ,  $\forall x \in [a, b]$  est continue de  $[a, b]$  dans  $[a, b]$  et admet une infinité de points fixes.

On suppose de plus que  $\phi$  est contractante, c'est à dire que

$$\exists L \in [0, 1[, \text{ tel que, } \forall (x, y) \in [a, b]^2, |\phi(x) - \phi(y)| \leq L|x - y|.$$

Q. 4

- a. Montrer que  $\phi$  admet un unique point fixe  $\alpha \in [a, b]$ .
- b. Montrer que la suite  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\alpha$ , pour toute donnée initiale  $x_0$  dans  $[a, b]$ .

R. 4

- a. Nous utilisons une démarche classique pour montrer l'unicité. Nous supposons que la fonction  $\phi$  admet deux points fixes  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  ( $\alpha_1 = \phi(\alpha_1)$  et  $\alpha_2 = \phi(\alpha_2)$ ) et nous allons montrer que  $\alpha_1 = \alpha_2$ . En utilisant le fait que  $\phi$  est contractante, on a

$$|\alpha_1 - \alpha_2| = |\phi(\alpha_1) - \phi(\alpha_2)| \leq L|\alpha_1 - \alpha_2|.$$

ce qui peut être réécrit comme

$$(1 - L)|\alpha_1 - \alpha_2| \leq 0. \quad (\text{R4.1})$$

Comme  $(1 - L) > 0$ , l'inégalité (R4.1) implique  $|\alpha_1 - \alpha_2| \leq 0$  et donc  $\alpha_1 = \alpha_2$ . La fonction  $\phi$  a donc au plus un point fixe.

- b. On a montré, dans les questions précédentes, que la fonction  $\phi$  admet un unique point fixe  $\alpha \in [a, b]$ . Alors, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$|x_{k+1} - \alpha| = |\phi(x_k) - \phi(\alpha)| \leq L|x_k - \alpha|,$$

si bien que, par récurrence, on peut montrer que

$$|x_k - \alpha| \leq L^k |x_0 - \alpha|, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Comme  $L < 1$ ,  $\lim_{k \rightarrow +\infty} L^k = 0$  et donc le terme de droite de l'inégalité précédente tend vers 0. Par le théorème de comparaison des limites,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} |x_k - \alpha| = 0.$$

Q. 5

**[Algo]** Écrire l'algorithme du point fixe (fonction `PointFixe`) permettant de résoudre l'équation  $\phi(x) = x$ .

On écrit ci-dessous l'algorithme du point fixe, en supposant que l'on recherche un point fixe non nul.

---

**Algorithm 1** Fonction **PointFixe** : résout  $\phi(x) = x$  par la méthode du point fixe

---

**Données :**  $\phi$  : fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$

$x_0$  : nombre réel, (donnée initiale)

$tol$  : nombre réel strictement positif (tolérance)

$k_{\max}$  : nombre entier supérieur ou égal à 1 (nombre maximal d'itérations)

**Résultat :**  $x$  : un réel tel que  $\frac{|\phi(x)-x|}{|x|+1} \leq tol$

---

1: **Fonction**  $x \leftarrow \text{PointFixe}(\phi, x_0, tol, k_{\max})$

2:  $k \leftarrow 1$

3:  $x \leftarrow \phi(x_0)$

4:  $r \leftarrow \frac{|x-x_0|}{|x|+1}$

▷ résidu à l'itération 1

5: **Tantque**  $r > tol$  et  $k \leq k_{\max}$  **faire**

6:  $x_0 \leftarrow x$

7:  $x \leftarrow \phi(x_0)$

8:  $r \leftarrow \frac{|x-x_0|}{|x|+1}$

▷ résidu à l'itération k+1

9:  $k \leftarrow k + 1$

10: **Fin Tantque**

11: **Fin Fonction**

---

