

### EXERCICE 3

Soient  $I = [0, \pi/2]$  et  $\begin{cases} \Phi : I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sin(x) \end{cases}$ . Soit  $x_0 \in I \setminus \{0\}$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on pose

$$x_{k+1} = \Phi(x_k).$$

Q. 1

- a. Montrer que la suite  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est bien définie.
- b. Montrer que la suite converge vers  $\alpha \in I$  que l'on déterminera.

R. 1

- a. Pour cela, il suffit de démontrer par récurrence sur  $k$  que  $x_k \in I$ .
  - Initialisation:  $x_0 \in I$ , par hypothèse.
  - Hérédité: Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . On suppose  $x_k \in I$ , et on peut donc calculer  $f(x_k)$  et définir  $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ .  
Or, sur  $\mathbb{R}_+$ , on a  $\sin(x) \leq x$ , (étudier  $g(x) = x - \sin(x)$  ...). Comme  $x_k \in I$  et que  $\sin(x) \geq 0, \forall x \in I$ , on obtient

$$0 \leq x_{k+1} = \sin(x_k) \leq x_k$$

et donc  $x_{k+1} \in I$ .

- b. On a vu que la suite était décroissante ( $x_{k+1} \leq x_k$ ) et minorée par 0: elle est donc convergente. Notons  $\alpha \in \mathbb{R}$  sa limite.

On a,  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $x_k \in I$ , un fermé borné de  $\mathbb{R}$ , donc  $\alpha \in I$ .

Comme  $\Phi$  est continue sur  $I$ , on a

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \Phi(x_k) = \Phi\left(\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k\right) = f(\alpha)$$

De plus, on a

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \Phi(x_k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} x_{k+1} = \alpha$$

et donc  $\alpha \in I$  est un point fixe de  $\Phi$ .

En posant  $g(x) = x - \Phi(x)$ , on a  $g(0) = 0$  et,  $\forall x \in I \setminus \{0\}$ ,  $g'(x) = 1 - \cos(x) > 0$  c'est à dire  $g(x) > 0$ : la seule racine de  $g$  dans  $I$  est donc 0 et c'est alors l'unique point fixe de  $\Phi$ , i.e.  $\alpha = 0$ .

Q. 2

a. Montrer que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|} = 1.$$

b. La convergence est-elle linéaire? Justifier.

R. 2

a. Comme  $x_0 \in I \setminus \{0\}$ , ar une simple récurrence, on peut montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad 0 < x_k < 1.$$

Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Comme  $\Phi \in \mathcal{C}^1$ , on a, en utilisant la formule de Taylor-Lagrange,

$$\xi_k \in ]\min(\alpha, x_k), \max(\alpha, x_k)[, \quad \Phi(x_k) = \Phi(\alpha) + (x_k - \alpha)\Phi'(\xi_k).$$

On obtient donc

$$\Phi(x_k) - \Phi(\alpha) = x_{k+1} - \alpha = (x_k - \alpha)\Phi'(\xi_k)$$

Comme  $x_k - \alpha \neq 0$ , on en déduit

$$\frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|} = \Phi'(\xi_k).$$

Or  $x_k$  converge vers  $\alpha$  et  $\xi_k \in ]\min(\alpha, x_k), \max(\alpha, x_k)[$  entraîne  $\xi_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \alpha$ .

La fonction  $\Phi'$  étant continue, un passage à limite donne

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \Phi'(\xi_k) = \Phi'(\alpha) = \cos(0) = 1.$$

b. La convergence n'est pas linéaire car il aurait fallu démontrer l'existence de  $\mu \in ]0, 1[$  telle que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|} = \mu.$$

La convergence est donc sous-linéaire.

