

Exercices associés au cours d'Analyse Numérique I

Rappels d'Algèbre Linéaire

1 Matrices Blocs

EXERCICE 1

On considère les matrices blocs suivantes

$$\mathbb{A} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{C} & \mathbb{I} \\ \hline \mathbb{I} & \mathbb{O} \end{array} \right) \quad \text{et} \quad \mathbb{B} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I} & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{C} & \mathbb{C} \end{array} \right)$$

avec par identification

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbb{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Q. 1 Calculer les matrices $\mathbb{A}\mathbb{B}$ et $\mathbb{B}\mathbb{A}$ en utilisant l'écriture bloc. □

Q. 2 Exprimer les matrices $\mathbb{B}(\mathbb{A} + \mathbb{B})$ et $(2\mathbb{B} - \mathbb{A})(\mathbb{B} + \mathbb{A})$ en fonction des matrices $\mathbb{C}$ et $\mathbb{I}$. □

EXERCICE 2

Soient

$$\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c|cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \text{et} \quad \mathbb{B} = \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & -1 & & \\ \hline 0 & 0 & & \\ \hline 0 & 0 & & \\ \hline -1 & -2 & & \\ -1 & -2 & & \\ -1 & -2 & & \end{array} \right)$$

Utiliser la multiplication par blocs pour calculer $\mathbb{A}\mathbb{B}$.

EXERCICE 3

Soient $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, bloc-carrés de 2×2 blocs dont le bloc $(1, 1)$ est dans $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$.

Q. 1 a. Justifiez de la faisabilité du produit matriciel par blocs de $\mathbb{A}\mathbb{B}$. □

b. Utiliser la multiplication par blocs pour calculer $\mathbb{A}\mathbb{B}$. □

Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, bloc-carrés de 2×2 blocs dont le bloc $(2, 2)$ est dans $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$.

Q. 2 a. Justifiez de la faisabilité du produit matriciel par blocs de $\mathbb{E}\mathbb{F}$. □

b. Utiliser la multiplication par blocs pour calculer $\mathbb{E}\mathbb{F}$. □

Soient n un entier, $n \geq 2$, α_1, α_2 , deux réels, $\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2$, quatre vecteurs (colonne) de $\mathbb{R}^n$, et $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2$, deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note

$$\forall i \in \llbracket 1, 2 \rrbracket, \quad \mathbb{B}_i = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{A}_i & \mathbf{v}_i \\ \hline \mathbf{u}_i^t & \alpha_i \end{array} \right) \text{ et } \mathbb{C}_i = \left(\begin{array}{c|c} \alpha_i & \mathbf{u}_i^t \\ \hline \mathbf{v}_i & \mathbb{A}_i \end{array} \right)$$

Q. 3 a. Quel est l'ensemble des produits matriciels par blocs possible entre les matrices $\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2, \mathbb{C}_1$ et $\mathbb{C}_2$.

b. En utilisant, si possible, la multiplication par blocs, calculer $\mathbb{B}_1\mathbb{B}_2, \mathbb{B}_1\mathbb{C}_1$ et $\mathbb{C}_1\mathbb{C}_2$.

□

EXERCICE 4

Soient $\mathbb{E} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$, $\mathbb{F} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathbb{I}_n$ la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q. 1 Démontrer par récurrence sur n que

$$\det \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{E} & \mathbb{O}_{m,n} \\ \hline \mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{I}_n \end{array} \right) = \det \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_n & \mathbb{O}_{n,m} \\ \hline \mathbb{O}_{m,n} & \mathbb{E} \end{array} \right) = \det \mathbb{E}.$$

□

Q. 2 a. Donner les dimensions des blocs pour que le produit suivant soit possible et effectuer le calcul:

$$\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{E} & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{J}_2 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{J}_1 & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{F} \end{array} \right)$$

où $\mathbb{J}_1$ et $\mathbb{J}_2$ sont des matrices identités.

b. En déduire le déterminant de $\mathbb{A}$ en fonction des déterminants de $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$.

□

Soient $(\mathbb{A}_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de matrices carrées (pouvant être de dimensions différentes). Soit $\mathbb{B}_n$ la matrice bloc-carrée diagonale décomposée en $n \times n$ blocs, $n \geq 2$, définie par

$$\mathbb{B}_n = \left(\begin{array}{cccc} \mathbb{A}_1 & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{O} & & \ddots & \mathbb{O} \\ \vdots & & & \ddots \\ \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{A}_n \end{array} \right)$$

Q. 3 Démontrer par récurrence sur n que

$$\det \mathbb{B}_n = \prod_{i=1}^n \det \mathbb{A}_i.$$

□

EXERCICE 5

Soient $\mathbb{E} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$, $\mathbb{F} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathbb{I}_n$ la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q. 1 a. Démontrer par récurrence sur n que

$$\det \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{E} & \mathbb{O} \\ \hline \bullet & \mathbb{I}_n \end{array} \right) = \det \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_n & \bullet \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{E} \end{array} \right) = \det \mathbb{E}.$$

où $\bullet$ note des éléments quelconques

b. Que peut-on dire de

$$\det \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{E} & \bullet \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{I}_n \end{array} \right) \quad \text{et} \quad \det \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_n & \mathbb{O} \\ \hline \bullet & \mathbb{E} \end{array} \right)?$$

□

Q. 2 a. Donner les dimensions des blocs pour que le produit suivant soit possible et effectuer le calcul:

$$\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{E} & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{H} & \mathbb{J}_2 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{J}_1 & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{F} \end{array} \right)$$

où $\mathbb{J}_1$ et $\mathbb{J}_2$ sont des matrices identités et $\mathbb{H}$ une matrice.

b. En déduire le déterminant de $\mathbb{A}$ en fonction des déterminants de $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$.

□

Soit $\mathbb{B}_n$ la matrice bloc-carrée triangulaire inférieure décomposée en $n \times n$ blocs, $n \geq 2$, définie par

$$\mathbb{B}_n = \left(\begin{array}{cccc} \mathbb{B}_{1,1} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{B}_{n,1} & \cdots & \cdots & \mathbb{B}_{n,n} \end{array} \right)$$

Q. 3 Démontrer par récurrence sur n que

$$\det \mathbb{B}_n = \prod_{i=1}^n \det \mathbb{B}_{i,i}.$$

□

2 Matrices

EXERCICE 6

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ une matrice et $(\lambda, \mathbf{u})$ un élément propre de $\mathbb{A}$ avec $\|\mathbf{u}\|_2 = 1$.

Q. 1 En s'aidant de la base canonique $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$, construire une base orthonormée $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ telle que $\mathbf{x}_1 = \mathbf{u}$.

□

Notons $\mathbb{P}$ la matrice de changement de base canonique $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ dans la base $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$:

$$\mathbb{P} = \left(\begin{array}{c|c|c} \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline \mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_n \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \right)$$

Soit $\mathbb{B}$ la matrice définie par $\mathbb{B} = \mathbb{P}^* \mathbb{A} \mathbb{P}$.

Q. 2 a. Exprimer les coefficients de la matrice $\mathbb{B}$ en fonction de la matrice $\mathbb{A}$ et des vecteurs $\mathbf{x}_i$, $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

$$\mathbb{B} = \mathbb{P}^* \mathbb{A} \mathbb{P}.$$

b. En déduire que la première colonne de $\mathbb{B}$ est $(\lambda, 0, \dots, 0)^t$.

□

Q. 3 Par récurrence sur l'ordre de la matrice, montrer que la matrice $\mathbb{A}$ peut s'écrire sous la forme

$$\mathbb{A} = \mathbb{U} \mathbb{T} \mathbb{U}^*$$

où $\mathbb{U}$ est une matrice unitaire et $\mathbb{T}$ une matrice triangulaire supérieure.

□

Q. 4 En supposant $\mathbb{A}$ inversible et la décomposition $\mathbb{A} = \mathbb{U} \mathbb{T} \mathbb{U}^*$ connue, expliquer comment résoudre "simplement" le système linéaire $\mathbb{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$.

□

3 Normes

EXERCICE 7

Soient $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ deux vecteurs de $\mathbb{C}^n$.

Q. 1 Trouver $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\langle \alpha \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = 0$. □

Q. 2 En calculant $\|\alpha \mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2$, montrer que

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2. \quad (1)$$

Q. 3 Soit $\mathbf{x} \neq 0$. Montrer alors que l'inégalité (1) est une égalité si et seulement si $\mathbf{y} = \alpha \mathbf{x}$. □

EXERCICE 8

Q. 1 Soit la fonction $f(t) = (1 - \lambda) + \lambda t - t^\lambda$ avec $0 < \lambda < 1$. Montrer que pour tous $\alpha \geq 0$ et $\beta \geq 0$ on a

$$\alpha^\lambda \beta^{1-\lambda} \leq \lambda \alpha + (1 - \lambda) \beta. \quad (2)$$

Soient $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ deux vecteurs non nuls de $\mathbb{C}^n$. Soient $p > 1$ et $q > 1$ vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Q. 2 On pose $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_p}$ et $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|_q}$. En utilisant l'inégalité (2), montrer que l'on a l'inégalité

$$\sum_{i=1}^n |u_i v_i| \leq \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n |u_i|^p + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^n |v_i|^q = 1. \quad (3)$$

Q. 3 En déduire l'inégalité de Holder suivante

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \|\mathbf{x}\|_p \|\mathbf{y}\|_q. \quad (4)$$

Quel est le lien entre l'inégalité de Hölder et l'inégalité de Cauchy-Schwarz? □

EXERCICE 9

Etant donné une norme vectorielle $\|\bullet\|$ sur $\mathbb{K}^n$, on définit l'application $\|\bullet\|_s : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{R}^+$ par

$$\|\mathbb{A}\|_s \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} \quad (5)$$

Q. 1 Montrer que $\|\mathbb{I}\|_s = 1$. □

On note $\mathcal{B} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n ; \|\mathbf{v}\| \leq 1\}$ la boule unitée de $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{S} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n ; \|\mathbf{v}\| = 1\}$ la sphère unitée de $\mathbb{K}^n$.

Q. 2 a. Montrer que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{S}$ sont des compacts.

b. Montrer que

$$\|\mathbb{A}\|_s = \sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{S}} \|\mathbb{A}\mathbf{v}\| \quad (6)$$

c. En déduire que

$$\|\mathbb{A}\|_s = \sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{B}} \|\mathbb{A}\mathbf{v}\| \quad (7)$$

d. En déduire que l'application $\|\bullet\|_s$ est bien définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ i.e. $\forall \mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \|\mathbb{A}\|_s < +\infty$. □

Q. 3 a. Montrer

$$\|\mathbb{A}\|_s \leq \inf \{ \alpha \in \mathbb{R} : \|\mathbb{A}\mathbf{v}\| \leq \alpha \|\mathbf{v}\|, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \}.$$

b. Montrer qu'il existe $\mathbf{w} \in \mathcal{S}$ tel que $\|\mathbb{A}\|_s = \|\mathbb{A}\mathbf{w}\|$.

c. En déduire que

$$\|\mathbb{A}\|_s = \inf \{ \alpha \in \mathbb{R} : \|\mathbb{A}\mathbf{v}\| \leq \alpha \|\mathbf{v}\|, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \}. \quad (8)$$
□

Q. 4 a. Montrer que $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n, \|\mathbb{A}\mathbf{v}\| \leq \|\mathbb{A}\|_s \|\mathbf{v}\|$.

b. Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Montrer qu'il existe $\mathbf{u} \in \mathbb{K}^n$ tel que $\|\mathbf{u}\| = |\lambda|$ vérifiant

$$\|\mathbb{A}\mathbf{u}\| = \|\mathbb{A}\|_s \|\mathbf{u}\|.$$
□

Q. 5 Montrer que $\|\bullet\|_s$ est une norme matricielle. □

EXERCICE 10

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note

$$\|\mathbb{A}\|_1 \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \\ \mathbf{x} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{x}\|_1}{\|\mathbf{x}\|_1} = \sup_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \\ \|\mathbf{x}\|_1 = 1}} \|\mathbb{A}\mathbf{x}\|_1$$

la norme matricielle subordonnée à la norme vectorielle $\|\bullet\|_1$.

Q. 1 Montrer que

$$\sup_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \\ \|\mathbf{x}\|_1 = 1}} \|\mathbb{A}\mathbf{x}\|_1 \leq \max_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{i=1}^n |A_{i,j}|.$$
□

Q. 2 a. Déterminer un $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n, \|\mathbf{y}\|_1 = 1$ tel que

$$\|\mathbb{A}\mathbf{y}\|_1 = \max_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{i=1}^n |A_{i,j}|.$$

b. Conclure. □

Q. 3 [Algo] Ecrire une fonction algorithmique, nommée **Norm1**, calculant $\|\mathbb{A}\|_1$. □

EXERCICE 11

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note

$$\|\mathbb{A}\|_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \\ \mathbf{x} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{x}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty}$$

la norme matricielle subordonnée à la norme vectorielle $\|\bullet\|_\infty$.

Q. 1 Montrer que

$$\sup_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \\ \|\mathbf{x}\|_\infty = 1}} \|\mathbb{A}\mathbf{x}\|_\infty \leq \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{j=1}^n |A_{i,j}|.$$

□

Q. 2 a. Déterminer un $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$, $\|\mathbf{y}\|_\infty = 1$ tel que

$$\|\mathbb{A}\mathbf{y}\|_\infty = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{j=1}^n |A_{i,j}|.$$

b. Conclure.

□

Q. 3 [Algo] Ecrire une fonction algorithmique, nommée *NormInf*, calculant $\|\mathbb{A}\|_\infty$.

□

EXERCICE 12

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\mathbb{B} = \mathbb{A}^* \mathbb{A}$.

Q. 1 Soit $(\lambda, \mathbf{u}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ un élément propre de $\mathbb{B}$.

a. Montrer que la matrice $\mathbb{B}$ est hermitienne.

b. Montrer que les valeurs propres de $\mathbb{B}$ sont réelles.

c. En déduire que

$$\lambda = \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{u}\|_2^2}{\|\mathbf{u}\|_2^2}.$$

□

La matrice $\mathbb{B}$ étant hermitienne (elle est donc normale), d'après le Théorème de réduction 3.2 page 63, il existe alors une matrice $\mathbb{U}$ unitaire et une matrice $\mathbb{D}$ diagonale telle que

$$\mathbb{B} = \mathbb{U} \mathbb{D} \mathbb{U}^*.$$

On note $(\lambda_i, \mathbf{e}_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ les éléments propres de $\mathbb{D}$. Les vecteurs $\mathbf{e}_i$ sont les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{C}^n$ et $\lambda_i = \mathbb{D}_{ii}$.

Q. 2 a. Démontrer que les $(\lambda_i, \mathbf{v}_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ sont les éléments propres de $\mathbb{B}$ où $\mathbf{v}_i$ est le i -ème vecteur colonne de $\mathbb{U}$.

b. En déduire que $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ est une base orthonormée de $\mathbb{C}^n$.

□

Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ tel que $\|\mathbf{x}\|_2 = 1$ décomposée dans la base $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$:

$$\exists (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n, \text{ tels que } \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i.$$

Q. 3 a. Montrer que

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 = 1.$$

b. Montrer que

$$\sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \\ \|\mathbf{v}\|_2=1}} \|\mathbb{A}\mathbf{v}\|_2^2 \leq \rho(\mathbb{A}^* \mathbb{A}).$$

c. Déterminer un vecteur $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$, tel que

$$\|\mathbb{A}\mathbf{w}\|_2^2 = \rho(\mathbb{A}^* \mathbb{A}).$$

d. En déduire que

$$\|\mathbb{A}\|_2 \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \\ \mathbf{x} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} = \sqrt{\rho(\mathbb{A}^* \mathbb{A})}.$$

□

Q. 4 a. Montrer que la norme $\|\bullet\|_2$ est invariante par transformation unitaire :

$$\mathbb{U}\mathbb{U}^* = \mathbb{I} \implies \|\mathbb{A}\|_2 = \|\mathbb{U}\mathbb{A}\|_2 = \|\mathbb{A}\mathbb{U}\|_2 = \|\mathbb{U}^*\mathbb{A}\mathbb{U}\|_2.$$

b. Montrer que si $\mathbb{A}$ est hermitienne alors

$$\|\mathbb{A}\|_2 = \rho(\mathbb{A}).$$

□