

Exercices associés au cours d'Analyse Numérique I

Rappels d'Algèbre Linéaire

1 Matrices Blocs

EXERCICE 1

On considère les matrices blocs suivantes

$$\mathbb{A} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{C} & \mathbb{I} \\ \hline \mathbb{I} & \mathbb{O} \end{array} \right) \quad \text{et} \quad \mathbb{B} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I} & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{C} & \mathbb{C} \end{array} \right)$$

avec par identification

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbb{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Q. 1 Calculer les matrices $\mathbb{A}\mathbb{B}$ et $\mathbb{B}\mathbb{A}$ en utilisant l'écriture bloc. □

R. 1 On a

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{C} & \mathbb{I} \\ \hline \mathbb{I} & \mathbb{O} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I} & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{C} & \mathbb{C} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|cc} \mathbb{C}\mathbb{I} + \mathbb{I}\mathbb{C} & \mathbb{C}\mathbb{O} + \mathbb{I}\mathbb{C} \\ \hline \mathbb{I}\mathbb{I} + \mathbb{O}\mathbb{C} & \mathbb{I}\mathbb{O} + \mathbb{O}\mathbb{C} \end{array} \right)$$

et donc

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = \left(\begin{array}{cc|cc} 2\mathbb{C} & \mathbb{C} \\ \hline \mathbb{I} & \mathbb{O} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 1 & 2 \\ 6 & 8 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

On a

$$\mathbb{B}\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I} & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{C} & \mathbb{C} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{C} & \mathbb{I} \\ \hline \mathbb{I} & \mathbb{O} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|cc} \mathbb{I}\mathbb{C} + \mathbb{O}\mathbb{I} & \mathbb{I}\mathbb{I} + \mathbb{O}\mathbb{O} \\ \hline \mathbb{C}\mathbb{C} + \mathbb{C}\mathbb{I} & \mathbb{C}\mathbb{I} + \mathbb{C}\mathbb{O} \end{array} \right)$$

et donc

$$\mathbb{B}\mathbb{A} = \left(\begin{array}{cc|cc} \mathbb{C} & \mathbb{I} \\ \hline \mathbb{C}^2 + \mathbb{C} & \mathbb{C} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ \hline 8 & 12 & 1 & 2 \\ 18 & 26 & 3 & 4 \end{array} \right)$$

Q. 2 Exprimer les matrices $\mathbb{B}(\mathbb{A} + \mathbb{B})$ et $(2\mathbb{B} - \mathbb{A})(\mathbb{B} + \mathbb{A})$ en fonction des matrices $\mathbb{C}$ et $\mathbb{I}$. □

R. 2 On a

$$\mathbb{A} + \mathbb{B} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{C} & \mathbb{I} \\ \hline \mathbb{I} & \mathbb{O} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I} & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{C} & \mathbb{C} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I} + \mathbb{C} & \mathbb{I} \\ \hline \mathbb{I} + \mathbb{C} & \mathbb{C} \end{array} \right)$$

ce qui donne

$$\mathbb{B}(\mathbb{A} + \mathbb{B}) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I} & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{C} & \mathbb{C} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I} + \mathbb{C} & \mathbb{I} \\ \hline \mathbb{I} + \mathbb{C} & \mathbb{C} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}(\mathbb{I} + \mathbb{C}) + \mathbb{O}(\mathbb{I} + \mathbb{C}) & \mathbb{I}\mathbb{I} + \mathbb{O}\mathbb{C} \\ \hline \mathbb{C}(\mathbb{I} + \mathbb{C}) + \mathbb{C}(\mathbb{I} + \mathbb{C}) & \mathbb{C}\mathbb{I} + \mathbb{C}\mathbb{C} \end{array} \right)$$

c'est à dire

$$\mathbb{B}(\mathbb{A} + \mathbb{B}) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I} + \mathbb{C} & \mathbb{I} \\ \hline 2\mathbb{C}(\mathbb{I} + \mathbb{C}) & \mathbb{C}(\mathbb{I} + \mathbb{C}) \end{array} \right)$$

On a

$$(2\mathbb{B} - \mathbb{A})(\mathbb{B} + \mathbb{A}) = \left(\begin{array}{c|c} 2\mathbb{I} - \mathbb{C} & -\mathbb{I} \\ \hline 2\mathbb{C} - \mathbb{I} & 2\mathbb{C} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I} + \mathbb{C} & \mathbb{I} \\ \hline \mathbb{I} + \mathbb{C} & \mathbb{C} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} (2\mathbb{I} - \mathbb{C})(\mathbb{I} + \mathbb{C}) - \mathbb{I}(\mathbb{I} + \mathbb{C}) & (2\mathbb{I} - \mathbb{C})\mathbb{I} - \mathbb{I}\mathbb{C} \\ \hline (2\mathbb{C} - \mathbb{I})(\mathbb{I} + \mathbb{C}) + 2\mathbb{C}(\mathbb{I} + \mathbb{C}) & (2\mathbb{C} - \mathbb{I})\mathbb{I} + \mathbb{C} + 2\mathbb{C}\mathbb{C} \end{array} \right)$$

ou encore

$$(2\mathbb{B} - \mathbb{A})(\mathbb{B} + \mathbb{A}) = \left(\begin{array}{c|c} (\mathbb{I} - \mathbb{C})(\mathbb{I} + \mathbb{C}) & 2(\mathbb{I} - \mathbb{C}) \\ \hline (4\mathbb{C} - \mathbb{I})(\mathbb{I} + \mathbb{C}) & 2\mathbb{C}^2 + 2\mathbb{C} - \mathbb{I} \end{array} \right)$$

EXERCICE 2

Soient

$$\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c|cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \text{et} \quad \mathbb{B} = \left(\begin{array}{cc} -1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & -2 \\ -1 & -2 \\ -1 & -2 \end{array} \right)$$

Utiliser la multiplication par blocs pour calculer $\mathbb{A}\mathbb{B}$.

Correction La matrice $\mathbb{A}$ est une matrice bloc de 2×3 blocs et $\mathbb{A}$ est une matrice bloc de 3×1 blocs. Le nombre de blocs colonnes de $\mathbb{A}$ et le nombre de blocs lignes de $\mathbb{B}$ sont identiques (3). De plus, pour tout $j \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, le nombre de colonnes du bloc $(1, j)$ de $\mathbb{A}$ est égale au nombre de lignes du bloc $(j, 1)$ de $\mathbb{B}$. Le produit bloc de $\mathbb{A}$ par $\mathbb{B}$ est donc possible et le résultat est une matrice bloc de 2×1 blocs, le bloc $(1, 1)$ étant dans $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ et le bloc $(2, 1)$ étant dans $\mathcal{M}_{1,2}(\mathbb{R})$. En notant $\mathbb{A}_{i,j}$, $\forall (i, j) \in \llbracket 1, 2 \rrbracket \times \llbracket 1, 3 \rrbracket$ et $\mathbb{B}_{i,j}$, $\forall (i, j) \in \llbracket 1, 2 \rrbracket \times \llbracket 1, 3 \rrbracket$

$$\left(\begin{array}{c} \mathbb{B}_{1,1} \\ \mathbb{B}_{2,1} \\ \mathbb{B}_{3,1} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbb{A}_{1,1} & \mathbb{A}_{1,2} & \mathbb{A}_{1,3} \\ \hline \mathbb{A}_{2,1} & \mathbb{A}_{2,2} & \mathbb{A}_{2,3} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \mathbb{A}_{1,1}\mathbb{B}_{1,1} + \mathbb{A}_{1,2}\mathbb{B}_{2,1} + \mathbb{A}_{1,3}\mathbb{B}_{3,1} \\ \mathbb{A}_{2,1}\mathbb{B}_{1,1} + \mathbb{A}_{2,2}\mathbb{B}_{2,1} + \mathbb{A}_{2,3}\mathbb{B}_{3,1} \end{array} \right)$$

On a

$$\mathbb{A}_{1,1}\mathbb{B}_{1,1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{A}_{1,2}\mathbb{B}_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{A}_{1,3}\mathbb{B}_{3,1} = \begin{pmatrix} -9 & -18 \\ -9 & -18 \end{pmatrix}$$

et

$$\mathbb{A}_{2,1}\mathbb{B}_{1,1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{A}_{2,2}\mathbb{B}_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{A}_{2,3}\mathbb{B}_{3,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ce qui donne

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = \begin{pmatrix} -10 & -19 \\ -10 & -19 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

◇

EXERCICE 3

Soient $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, bloc-carrés de 2×2 blocs dont le bloc $(1, 1)$ est dans $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$.

Q. 1 a. Justifiez de la faisabilité du produit matriciel par blocs de $\mathbb{A}\mathbb{B}$.

b. Utiliser la multiplication par blocs pour calculer $\mathbb{A}\mathbb{B}$.

□

R. 1 En spécifiant les dimensions, on note

$$\mathbb{A} = \begin{array}{c} 1 \\ n-1 \end{array} \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{A}_{1,1} & \mathbb{A}_{1,2} \\ \hline \mathbb{A}_{2,1} & \mathbb{A}_{2,2} \end{array} \right) \quad \text{et} \quad \mathbb{B} = \begin{array}{c} 1 \\ n-1 \end{array} \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{B}_{1,1} & \mathbb{B}_{1,2} \\ \hline \mathbb{B}_{2,1} & \mathbb{B}_{2,2} \end{array} \right)$$

- a.
- Le nombre de blocs colonnes de $\mathbb{A}$ et le nombre de blocs lignes de $\mathbb{B}$ sont identiques ($= 2$).
 - Le nombre de colonnes du premier bloc colonne de $\mathbb{A}$ est égale au nombre de lignes du premier bloc ligne de $\mathbb{B}$, c'est à dire 1.
 - Le nombre de colonnes du deuxième bloc colonne de $\mathbb{A}$ est égale au nombre de lignes du deuxième bloc ligne de $\mathbb{B}$, c'est à dire $n - 1$.

Le produit matriciel bloc $\mathbb{A}\mathbb{B}$ est donc possible. Le résultat est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, bloc-carrés de 2×2 blocs dont le bloc $(1, 1)$ est dans $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et le bloc $(2, 2)$ dans $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$.

b. On a

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = \begin{array}{c} 1 \\ n-1 \end{array} \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{A}_{1,1} & \mathbb{A}_{1,2} \\ \hline \mathbb{A}_{2,1} & \mathbb{A}_{2,2} \end{array} \right) \begin{array}{c} 1 \\ n-1 \end{array} \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{B}_{1,1} & \mathbb{B}_{1,2} \\ \hline \mathbb{B}_{2,1} & \mathbb{B}_{2,2} \end{array} \right) = \begin{array}{c} 1 \\ n-1 \end{array} \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{A}_{1,1}\mathbb{B}_{1,1} + \mathbb{A}_{1,2}\mathbb{B}_{2,1} & \mathbb{A}_{1,1}\mathbb{B}_{1,2} + \mathbb{A}_{1,2}\mathbb{B}_{2,2} \\ \hline \mathbb{A}_{2,1}\mathbb{B}_{1,1} + \mathbb{A}_{2,2}\mathbb{B}_{2,1} & \mathbb{A}_{2,1}\mathbb{B}_{1,2} + \mathbb{A}_{2,2}\mathbb{B}_{2,2} \end{array} \right)$$

Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, bloc-carrés de 2×2 blocs dont le bloc $(2, 2)$ est dans $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$.

Q. 2 a. Justifiez de la faisabilité du produit matriciel par blocs de $\mathbb{E}\mathbb{F}$.

b. Utiliser la multiplication par blocs pour calculer $\mathbb{E}\mathbb{F}$.

□

R. 2 En spécifiant les dimensions, on note

$$\mathbb{E} = \begin{array}{c} n-1 \\ 1 \end{array} \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{E}_{1,1} & \mathbb{E}_{1,2} \\ \hline \mathbb{E}_{2,1} & \mathbb{E}_{2,2} \end{array} \right) \quad \text{et} \quad \mathbb{F} = \begin{array}{c} n-1 \\ 1 \end{array} \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{F}_{1,1} & \mathbb{F}_{1,2} \\ \hline \mathbb{F}_{2,1} & \mathbb{F}_{2,2} \end{array} \right)$$

- a.
- Le nombre de blocs colonnes de $\mathbb{E}$ et le nombre de blocs lignes de $\mathbb{F}$ sont identiques ($= 2$).
 - Le nombre de colonnes du premier bloc colonne de $\mathbb{E}$ est égale au nombre de lignes du premier bloc ligne de $\mathbb{F}$, c'est à dire $n - 1$.
 - Le nombre de colonnes du deuxième bloc colonne de $\mathbb{E}$ est égale au nombre de lignes du deuxième bloc ligne de $\mathbb{F}$, c'est à dire 1.

Le produit matriciel bloc $\mathbb{E}\mathbb{F}$ est donc possible. Le résultat est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, bloc-carrés de 2×2 blocs dont le bloc $(1, 1)$ est dans $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ et le bloc $(2, 2)$ dans $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$

b. On a

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = \begin{array}{c} n-1 \\ 1 \end{array} \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{F}_{1,1} & \mathbb{F}_{1,2} \\ \hline \mathbb{F}_{2,1} & \mathbb{F}_{2,2} \end{array} \right) = \begin{array}{c} n-1 \\ 1 \end{array} \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{E}_{1,1}\mathbb{F}_{1,1} + \mathbb{E}_{1,2}\mathbb{F}_{2,1} & \mathbb{E}_{1,1}\mathbb{F}_{1,2} + \mathbb{E}_{1,2}\mathbb{F}_{2,2} \\ \hline \mathbb{E}_{2,1}\mathbb{F}_{1,1} + \mathbb{E}_{2,2}\mathbb{F}_{2,1} & \mathbb{E}_{2,1}\mathbb{F}_{1,2} + \mathbb{E}_{2,2}\mathbb{F}_{2,2} \end{array} \right)$$

Soient n un entier, $n \geq 2$, α_1, α_2 , deux réels, $\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2$, quatre vecteurs (colonne) de $\mathbb{R}^n$, et $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2$, deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note

$$\forall i \in \llbracket 1, 2 \rrbracket, \quad \mathbb{B}_i = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{A}_i & \mathbf{v}_i \\ \hline \mathbf{u}_i^\top & \alpha_i \end{array} \right) \text{ et } \mathbb{C}_i = \left(\begin{array}{c|c} \alpha_i & \mathbf{u}_i^\top \\ \hline \mathbf{v}_i & \mathbb{A}_i \end{array} \right)$$

Q. 3 a. Quel est l'ensemble des produits matriciels par blocs possible entre les matrices $\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2, \mathbb{C}_1$ et $\mathbb{C}_2$.

b. En utilisant, si possible, la multiplication par blocs, calculer $\mathbb{B}_1\mathbb{B}_2, \mathbb{B}_1\mathbb{C}_1$ et $\mathbb{C}_1\mathbb{C}_2$.

□

R. 3 a. On peut effectuer les produits matriciels blocs $\mathbb{B}_1\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_1\mathbb{B}_2, \mathbb{B}_2\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2\mathbb{B}_2, \mathbb{C}_1\mathbb{C}_1, \mathbb{C}_1\mathbb{C}_2, \mathbb{C}_2\mathbb{C}_1, \mathbb{C}_2\mathbb{C}_2$.

b. Le calcul matriciel bloc de $\mathbb{B}_1$ par $\mathbb{C}_1$ n'est pas possible (incompatibilité des dimensions des blocs).
On a

$$\mathbb{B}_1\mathbb{B}_2 = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{A}_1 & \mathbf{v}_1 \\ \hline \mathbf{u}_1^\top & \alpha_1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{A}_2 & \mathbf{v}_2 \\ \hline \mathbf{u}_2^\top & \alpha_2 \end{array} \right) = \begin{array}{c} n \\ 1 \end{array} \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{A}_1\mathbb{A}_2 + \mathbf{v}_1\mathbf{u}_2^\top & \mathbb{A}_1\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1\alpha_2 \\ \hline \mathbf{u}_1^\top\mathbb{A}_2 + \alpha_1\mathbf{u}_2^\top & \mathbf{u}_1^\top\mathbf{v}_2 + \alpha_1\alpha_2 \end{array} \right)$$

et

$$\mathbb{C}_1\mathbb{C}_2 = \left(\begin{array}{c|c} \alpha_1 & \mathbf{u}_1^\top \\ \hline \mathbf{v}_1 & \mathbb{A}_1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} \alpha_2 & \mathbf{u}_2^\top \\ \hline \mathbf{v}_2 & \mathbb{A}_2 \end{array} \right) = \begin{array}{c} 1 \\ n \end{array} \left(\begin{array}{c|c} \alpha_1\alpha_2 + \mathbf{u}_1^\top\mathbf{v}_2 & \alpha_1\mathbf{u}_2^\top + \mathbf{u}_1^\top\mathbb{A}_2 \\ \hline \mathbf{v}_1\alpha_2 + \mathbb{A}_1\mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_1\mathbf{u}_2^\top + \mathbb{A}_1\mathbb{A}_2 \end{array} \right)$$

EXERCICE 4

Soient $\mathbb{E} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$, $\mathbb{F} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathbb{I}_n$ la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q. 1 Démontrer par récurrence sur n que

$$\det \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{E} & \mathbb{O}_{m,n} \\ \hline \mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{I}_n \end{array} \right) = \det \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_n & \mathbb{O}_{n,m} \\ \hline \mathbb{O}_{m,n} & \mathbb{E} \end{array} \right) = \det \mathbb{E}.$$

□

R. 1 On note $\mathbb{A}_n$ la matrice de $\mathcal{M}_{n+m}(\mathbb{K})$ définie par

$$\mathbb{A}_n = \left(\begin{array}{c|c} \begin{array}{ccc} \overset{n}{1} & \overset{m}{0} & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} & \begin{array}{c} \mathbb{O}_{n,m} \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} \mathbb{O}_{m,n} \end{array} & \begin{array}{c} \mathbb{E} \end{array} \end{array} \right) \begin{array}{l} n \\ m \end{array}$$

On va alors démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la proposition suivante

$$(\mathcal{P}_n) : \det \mathbb{A}_n = \det \mathbb{E}.$$

- **Initialisation:** montrons que $(\mathcal{P}_1)$ est vraie.

On a

$$\mathbb{A}_1 = \left(\begin{array}{c|c} \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \dots \dots 0 \\ \hline \mathbb{E} \end{array} \end{array} \right)$$

Pour le calcul du déterminant, on utilise la méthode des cofacteurs en développant par rapport à la première ligne (on aurait pu aussi développer par rapport à la première colonne) pour obtenir

$$\det \mathbb{A}_1 = \sum_{j=1}^{1+m} (-1)^{1+j} (\mathbb{A}_1)_{1,j} \det \mathbb{A}_1^{[1,j]}$$

où $\mathbb{A}_1^{[1,j]} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ est la matrice obtenue en supprimant la ligne 1 et la colonne j de $\mathbb{A}_1$. On a alors

$$\det \mathbb{A}_1 = (-1)^{1+1} \underbrace{(\mathbb{A}_1)_{1,1}}_{=1} \det \mathbb{A}_1^{[1,1]} + \sum_{j=2}^{1+m} (-1)^{1+j} \underbrace{(\mathbb{A}_1)_{1,j}}_{=0} \det \mathbb{A}_1^{[1,j]}$$

Comme $\mathbb{A}_1^{[1,1]} = \mathbb{E}$, on en déduit que $(\mathcal{P}_1)$ est vraie.

- **Hérédité:** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose $(\mathcal{P}_n)$ vraie et on va établir que $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vérifiée. On peut noter que

$$\mathbb{A}_{n+1} = \left(\begin{array}{c|c} \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \dots \dots 0 \\ \hline \mathbb{A}_n \end{array} \end{array} \right)$$

et donc $\det \mathbb{A}_{n+1} = \det \mathbb{A}_n$ (voir initialisation). En utilisant l'hypothèse de récurrence, on en déduit

$$\det \mathbb{A}_{n+1} = \det \mathbb{E}$$

c'est à dire que $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie.

- **Conclusion:** La proposition $(\mathcal{P}_n)$ est vraie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

La démonstration de

$$\det \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{E} & \mathbb{O}_{m,n} \\ \hline \mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{I}_n \end{array} \right) = \det \mathbb{E}.$$

est similaire en développant le déterminant par rapport à la dernière ligne ou la dernière colonne.

- Q. 2** a. Donner les dimensions des blocs pour que le produit suivant soit possible et effectuer le calcul:

$$\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{E} & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{J}_2 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{J}_1 & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{F} \end{array} \right)$$

où $\mathbb{J}_1$ et $\mathbb{J}_2$ sont des matrices identités.

- b. En déduire le déterminant de $\mathbb{A}$ en fonction des déterminants de $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$.

□

- R. 2** a. On rappelle la définition du produit matricielle blocs avec des matrices de 2×2 blocs. Soient $\mathbb{X} \in \mathcal{M}_{m_1+m_2, n_1+n_2}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{Y} \in \mathcal{M}_{p_1+p_2, q_1+q_2}(\mathbb{K})$ les deux matrices blocs

$$\mathbb{X} = \begin{matrix} & \begin{matrix} n_1 & n_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} m_1 \\ m_2 \end{matrix} & \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{X}_{1,1} & \mathbb{X}_{1,2} \\ \hline \mathbb{X}_{2,1} & \mathbb{X}_{2,2} \end{array} \right) \end{matrix} \quad \text{et} \quad \mathbb{Y} = \begin{matrix} & \begin{matrix} q_1 & q_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} p_1 \\ p_2 \end{matrix} & \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{Y}_{1,1} & \mathbb{Y}_{1,2} \\ \hline \mathbb{Y}_{2,1} & \mathbb{Y}_{2,2} \end{array} \right) \end{matrix}$$

Le produit matricielle bloc $\mathbb{X}\mathbb{Y}$ est possible si, le nombre de blocs colonne de $\mathbb{X}$ est égale au nombre de blocs lignes de $\mathbb{Y}$ (ce qui est le cas ici) et si, les nombres de colonnes des blocs de $\mathbb{X}$ sont compatibles avec les nombres de lignes des blocs de $\mathbb{Y}$, c'est à dire,

$$n_1 = p_1 \quad \text{et} \quad n_2 = p_2.$$

Dans ce cas, la matrice $\mathbb{Z} = \mathbb{X}\mathbb{Y}$ est une matrice de $m_1 + m_2$ lignes et $q_1 + q_2$ colonnes et on a

$$\begin{aligned} & \begin{matrix} & \begin{matrix} q_1 & q_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} n_1 \\ n_2 \end{matrix} & \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{Y}_{1,1} & \mathbb{Y}_{1,2} \\ \hline \mathbb{Y}_{2,1} & \mathbb{Y}_{2,2} \end{array} \right) \end{matrix} \\ & \begin{matrix} \begin{matrix} m_1 \\ m_2 \end{matrix} & \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{X}_{1,1} & \mathbb{X}_{1,2} \\ \hline \mathbb{X}_{2,1} & \mathbb{X}_{2,2} \end{array} \right) \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} q_1 & q_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} m_1 \\ m_2 \end{matrix} & \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{X}_{1,1}\mathbb{Y}_{1,1} + \mathbb{X}_{1,2}\mathbb{Y}_{2,1} & \mathbb{X}_{1,1}\mathbb{Y}_{1,2} + \mathbb{X}_{1,2}\mathbb{Y}_{2,2} \\ \hline \mathbb{X}_{2,1}\mathbb{Y}_{1,1} + \mathbb{X}_{2,2}\mathbb{Y}_{2,1} & \mathbb{X}_{2,1}\mathbb{Y}_{1,2} + \mathbb{X}_{2,2}\mathbb{Y}_{2,2} \end{array} \right) \end{matrix} \end{aligned}$$

On va donc appliquer cela à cet exercice en posant

$$\mathbb{X} = \begin{matrix} & \begin{matrix} m & ? \end{matrix} \\ \begin{matrix} ? \end{matrix} & \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{E} & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{J}_2 \end{array} \right) \end{matrix} \quad \text{et} \quad \mathbb{Y} = \begin{matrix} & \begin{matrix} ? & n \end{matrix} \\ \begin{matrix} n \end{matrix} & \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{J}_1 & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{F} \end{array} \right) \end{matrix}$$

Pour déterminer les dimensions manquantes, on utilise la définition du produit matriciel blocs pour obtenir

$$\mathbb{X} = \begin{matrix} & \begin{matrix} m & n \end{matrix} \\ \begin{matrix} ? \end{matrix} & \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{E} & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{J}_2 \end{array} \right) \end{matrix} \quad \text{et} \quad \mathbb{Y} = \begin{matrix} & \begin{matrix} ? & n \end{matrix} \\ \begin{matrix} n \end{matrix} & \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{J}_1 & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{F} \end{array} \right) \end{matrix}$$

On finalise en notant que les matrices identités sont des matrices carrées et donc

$$\mathbb{X} = \begin{smallmatrix} m \\ n \end{smallmatrix} \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{E} & \mathbb{O}_{m,n} \\ \hline \mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{J}_2 \end{array} \right) \quad \text{et} \quad \mathbb{Y} = \begin{smallmatrix} m \\ n \end{smallmatrix} \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{J}_1 & \mathbb{O}_{m,n} \\ \hline \mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{F} \end{array} \right)$$

Sous ces conditions de dimensions le produit matriciel bloc $\mathbb{X}\mathbb{Y}$ est possible et on a

$$\begin{aligned} \mathbb{X}\mathbb{Y} &= \begin{smallmatrix} m \\ n \end{smallmatrix} \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{E} & \mathbb{O}_{m,n} \\ \hline \mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{I}_n \end{array} \right) \\ &= \begin{smallmatrix} m \\ n \end{smallmatrix} \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_m & \mathbb{O}_{m,n} \\ \hline \mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{F} \end{array} \right) \\ &= \begin{smallmatrix} m \\ n \end{smallmatrix} \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{E}\mathbb{I}_m + \mathbb{O}_{m,n}\mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{E}\mathbb{O}_{m,n} + \mathbb{O}_{m,n}\mathbb{F} \\ \hline \mathbb{O}_{n,m}\mathbb{I}_m + \mathbb{I}_n\mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{O}_{n,m}\mathbb{O}_{m,n} + \mathbb{I}_n\mathbb{F} \end{array} \right) \\ &= \begin{smallmatrix} m \\ n \end{smallmatrix} \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{E} & \mathbb{O}_{m,n} \\ \hline \mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{F} \end{array} \right). \end{aligned}$$

- b. Comme le déterminant d'un produit de matrices carrées est le produit des déterminants des matrices carrées, on a

$$\det \mathbb{A} = \det \left(\left(\begin{array}{c|c} \mathbb{E} & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{J}_2 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{J}_1 & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{F} \end{array} \right) \right) = \det \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{E} & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{J}_2 \end{array} \right) \det \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{J}_1 & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{F} \end{array} \right).$$

En utilisant les résultats de la question 1, on en déduit

$$\det \mathbb{A} = \det \mathbb{E} \det \mathbb{F}.$$

Soient $(\mathbb{A}_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de matrices carrées (pouvant être de dimensions différentes). Soit $\mathbb{B}_n$ la matrice bloc-carrée diagonale décomposée en $n \times n$ blocs, $n \geq 2$, définie par

$$\mathbb{B}_n = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_1 & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{O} & & \ddots & \mathbb{O} \\ \vdots & & & \ddots \\ \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{A}_n \end{pmatrix}$$

Q. 3 Démontrer par récurrence sur n que

$$\det \mathbb{B}_n = \prod_{i=1}^n \det \mathbb{A}_i.$$

□

R. 3 On va alors démontrer par récurrence sur $n \geq 2$ la proposition suivante

$$(\mathcal{Q}_n) : \det \mathbb{B}_n = \prod_{i=1}^n \det \mathbb{A}_i.$$

- **Initialisation:** pour $n = 2$, cela a été fait en question 2.
- **Hérédité:** Soit $n \geq 2$, on suppose $(\mathcal{Q}_n)$ vraie et on va établir que $(\mathcal{Q}_{n+1})$ est vérifiée. On a

$$\mathbb{B}_{n+1} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_1 & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbb{O} & & \ddots & \mathbb{O} & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{A}_n & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{A}_{n+1} \end{pmatrix}$$

On note que les n premiers blocs lignes et colonnes de $\mathbb{B}_{n+1}$ correspondent à $\mathbb{B}_n$, et donc, on peut aussi écrire

$$\mathbb{B}_{n+1} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{B}_n & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{A}_{n+1} \end{array} \right)$$

D'après la question 2, on a

$$\det \mathbb{B}_{n+1} = \det \mathbb{B}_n \det \mathbb{A}_{n+1}.$$

Or, par hypothèse de récurrence, $(\mathcal{Q}_n)$ est vérifiée. On en déduit alors que

$$\det \mathbb{B}_{n+1} = \prod_{i=1}^n \det A_i \det \mathbb{A}_{n+1},$$

et donc $(\mathcal{Q}_{n+1})$ est vraie.

- **Conclusion:** La proposition $(\mathcal{Q}_n)$ est vraie, pour tout $n \geq 2$.

EXERCICE 5

Soient $\mathbb{E} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$, $\mathbb{F} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathbb{I}_n$ la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Q. 1 a. Démontrer par récurrence sur n que

$$\det \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{E} & \mathbb{O} \\ \hline \bullet & \mathbb{I}_n \end{array} \right) = \det \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_n & \bullet \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{E} \end{array} \right) = \det \mathbb{E}.$$

où $\bullet$ note des éléments quelconques

b. Que peut-on dire de

$$\det \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{E} & \bullet \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{I}_n \end{array} \right) \text{ et } \det \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_n & \mathbb{O} \\ \hline \bullet & \mathbb{E} \end{array} \right)?$$

□

R. 1 a. On note $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_{n+m}(\mathbb{K})$ définies par

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} & \overset{n}{\text{}} & & & \overset{m}{\text{}} & \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \bullet & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & & \\ \hline & \mathbb{O}_{m,n} & & & \mathbb{E} & \\ & & & & & \end{array} \right) \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ n \\ \\ \\ m \end{matrix}$$

On va alors démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la proposition suivante

$$(\mathcal{P}_n) : \forall \mathbb{A}_n \in \mathcal{E}_n, \det \mathbb{A}_n = \det \mathbb{E}.$$

- **Initialisation:** montrons que $(\mathcal{P}_1)$ est vraie.

Soit $A_1 \in \mathcal{E}_1$. On a

$$A_1 = \left(\begin{array}{c|cccccc} 1 & \bullet & \dots & \dots & \bullet & \\ \hline 0 & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \mathbb{E} \end{array} \right)$$

Pour le calcul du déterminant, on utilise la méthode des cofacteurs en développant par rapport à la première colonne pour obtenir

$$\det A_1 = \sum_{i=1}^{m+1} (-1)^{i+1} (A_1)_{i,1} \det A_1^{[i,1]}$$

où $A_1^{[i,1]} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ est la matrice obtenue en supprimant la ligne i et la colonne 1 de A_1 . On a alors

$$\det A_1 = (-1)^{1+1} \underbrace{(A_1)_{1,1}}_{=1} \det A_1^{[1,1]} + \sum_{i=2}^{m+1} (-1)^{i+1} \underbrace{(A_1)_{i,1}}_{=0} \det A_1^{[i,1]}$$

Comme $A_1^{[1,1]} = \mathbb{E}$, on en déduit que $(\mathcal{P}_1)$ est vraie.

- **Hérédité:** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose $(\mathcal{P}_n)$ vraie et on va établir que $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vérifiée. Soit $A_{n+1} \in \mathcal{E}_{n+1}$. On peut noter que

$$A_{n+1} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_{n+1} & \mathbb{O}_{n+1,m} \\ \hline \mathbb{O}_{m,n+1} & \mathbb{E} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \mathbb{O} & \bullet & \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{I}_n & \bullet & \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{E} & \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{u}^* \\ \hline \mathbb{O} & A_n \end{array} \right)$$

avec $A_n \in \mathcal{E}_n$ et $\mathbf{u} \in \mathbb{K}^{n+m}$, $\mathbf{u}_i = 0$, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a donc $\det A_{n+1} = \det A_n$ (voir initialisation). En utilisant l'hypothèse de récurrence, on en déduit

$$\det A_{n+1} = \det \mathbb{E}$$

c'est à dire que $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie.

- **Conclusion:** La proposition $(\mathcal{P}_n)$ est vraie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

La démonstration de

$$\det \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{E} & \mathbb{O}_{m,n} \\ \hline \bullet & \mathbb{I}_n \end{array} \right) = \det \mathbb{E}.$$

est similaire en développant le déterminant par rapport à la dernière colonne (à faire en exercice).

b. On a

$$\forall A \in \mathbb{K}^n, \det(A^*) = \overline{\det A}$$

On en déduit donc

$$\det \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{E} & \bullet \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{I}_n \end{array} \right) = \det \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_n & \mathbb{O} \\ \hline \bullet & \mathbb{E} \end{array} \right) = \det \mathbb{E}.$$

Q. 2 a. Donner les dimensions des blocs pour que le produit suivant soit possible et effectuer le calcul:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{E} & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{H} & \mathbb{J}_2 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{J}_1 & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{F} \end{array} \right)$$

où $\mathbb{J}_1$ et $\mathbb{J}_2$ sont des matrices identités et $\mathbb{H}$ une matrice.

b. En déduire le déterminant de A en fonction des déterminants de $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$.

□

- R. 2** a. On rappelle le définition du produit matricielle blocs avec des matrices de 2×2 blocs. Soient $\mathbb{X} \in \mathcal{M}_{m_1+m_2, n_1+n_2}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{Y} \in \mathcal{M}_{p_1+p_2, q_1+q_2}(\mathbb{K})$ les deux matrices blocs

$$\mathbb{X} = \begin{matrix} & \begin{matrix} n_1 & n_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} m_1 \\ m_2 \end{matrix} & \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{X}_{1,1} & \mathbb{X}_{1,2} \\ \hline \mathbb{X}_{2,1} & \mathbb{X}_{2,2} \end{array} \right) \end{matrix} \quad \text{et} \quad \mathbb{Y} = \begin{matrix} & \begin{matrix} q_1 & q_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} p_1 \\ p_2 \end{matrix} & \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{Y}_{1,1} & \mathbb{Y}_{1,2} \\ \hline \mathbb{Y}_{2,1} & \mathbb{Y}_{2,2} \end{array} \right) \end{matrix}$$

Le produit matricielle bloc $\mathbb{X}\mathbb{Y}$ est possible si, le nombre de blocs colonne de $\mathbb{X}$ est égale au nombre de blocs lignes de $\mathbb{Y}$ (ce qui est la cas ici) et si, les nombres de colonnes des blocs de $\mathbb{X}$ sont compatibles avec les nombres de lignes des blocs de $\mathbb{Y}$, c'est à dire,

$$n_1 = p_1 \quad \text{et} \quad n_2 = p_2.$$

Dans ce cas, la matrice $\mathbb{Z} = \mathbb{X}\mathbb{Y}$ est une matrice de $m_1 + m_2$ lignes et $q_1 + q_2$ colonnes et on a

$$\begin{aligned} & \begin{matrix} & \begin{matrix} q_1 & q_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} n_1 \\ n_2 \end{matrix} & \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{Y}_{1,1} & \mathbb{Y}_{1,2} \\ \hline \mathbb{Y}_{2,1} & \mathbb{Y}_{2,2} \end{array} \right) \end{matrix} \\ & \begin{matrix} \begin{matrix} m_1 \\ m_2 \end{matrix} & \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{X}_{1,1} & \mathbb{X}_{1,2} \\ \hline \mathbb{X}_{2,1} & \mathbb{X}_{2,2} \end{array} \right) \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} q_1 & q_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} m_1 \\ m_2 \end{matrix} & \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{X}_{1,1}\mathbb{Y}_{1,1} + \mathbb{X}_{1,2}\mathbb{Y}_{2,1} & \mathbb{X}_{1,1}\mathbb{Y}_{1,2} + \mathbb{X}_{1,2}\mathbb{Y}_{2,2} \\ \hline \mathbb{X}_{2,1}\mathbb{Y}_{1,1} + \mathbb{X}_{2,2}\mathbb{Y}_{2,1} & \mathbb{X}_{2,1}\mathbb{Y}_{1,2} + \mathbb{X}_{2,2}\mathbb{Y}_{2,2} \end{array} \right) \end{matrix} \end{aligned}$$

On va donc appliquer cela à cet exercice en posant

$$\mathbb{X} = \begin{matrix} & \begin{matrix} m & ? \end{matrix} \\ \begin{matrix} m \\ ? \end{matrix} & \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{E} & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{H} & \mathbb{J}_2 \end{array} \right) \end{matrix} \quad \text{et} \quad \mathbb{Y} = \begin{matrix} & \begin{matrix} ? & n \end{matrix} \\ \begin{matrix} ? \\ n \end{matrix} & \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{J}_1 & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{F} \end{array} \right) \end{matrix}$$

Pour déterminer les dimensions manquantes, on utilise la définition du produit matriciel blocs pour obtenir

$$\mathbb{X} = \begin{matrix} & \begin{matrix} m & n \end{matrix} \\ \begin{matrix} m \\ ? \end{matrix} & \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{E} & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{H} & \mathbb{J}_2 \end{array} \right) \end{matrix} \quad \text{et} \quad \mathbb{Y} = \begin{matrix} & \begin{matrix} ? & n \end{matrix} \\ \begin{matrix} ? \\ n \end{matrix} & \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{J}_1 & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{F} \end{array} \right) \end{matrix}$$

On finalise en notant que les matrices identités sont des matrices carrées et donc

$$\mathbb{X} = \begin{matrix} & \begin{matrix} m & n \end{matrix} \\ \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} & \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{E} & \mathbb{O}_{m,n} \\ \hline \mathbb{H} & \mathbb{J}_2 \end{array} \right) \end{matrix} \quad \text{et} \quad \mathbb{Y} = \begin{matrix} & \begin{matrix} m & n \end{matrix} \\ \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} & \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{J}_1 & \mathbb{O}_{m,n} \\ \hline \mathbb{H} & \mathbb{F} \end{array} \right) \end{matrix}$$

et donc $\mathbb{H} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$.

Sous ces conditions de dimensions le produit matriciel bloc $\mathbb{X}\mathbb{Y}$ est possible et on a

$$\begin{aligned} & \begin{matrix} & \begin{matrix} m & n \end{matrix} \\ \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} & \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_m & \mathbb{O}_{m,n} \\ \hline \mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{F} \end{array} \right) \end{matrix} \\ & \mathbb{A} = \mathbb{X}\mathbb{Y} = \begin{matrix} & \begin{matrix} m & n \end{matrix} \\ \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} & \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{E} & \mathbb{O}_{m,n} \\ \hline \mathbb{H} & \mathbb{I}_n \end{array} \right) \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} m & n \end{matrix} \\ \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} & \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{E}\mathbb{I}_m + \mathbb{O}_{m,n}\mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{E}\mathbb{O}_{m,n} + \mathbb{O}_{m,n}\mathbb{F} \\ \hline \mathbb{H}\mathbb{I}_m + \mathbb{I}_n\mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{H}\mathbb{O}_{m,n} + \mathbb{I}_n\mathbb{F} \end{array} \right) \end{matrix} \\ & = \begin{matrix} & \begin{matrix} m & n \end{matrix} \\ \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} & \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{E} & \mathbb{O}_{m,n} \\ \hline \mathbb{H} & \mathbb{F} \end{array} \right) \end{matrix}. \end{aligned}$$

- b. Comme le déterminant d'un produit de matrices carrées est le produit des déterminants des matrices carrées, on a

$$\det \mathbb{A} = \det \left(\left(\begin{array}{c|c} \mathbb{E} & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{H} & \mathbb{J}_2 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{J}_1 & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{F} \end{array} \right) \right) = \det \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{E} & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{H} & \mathbb{J}_2 \end{array} \right) \det \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{J}_1 & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{F} \end{array} \right).$$

En utilisant les résultats de la question 1, on en déduit

$$\det \mathbb{A} = \det \mathbb{E} \det \mathbb{F}.$$

Soit $\mathbb{B}_n$ la matrice bloc-carrée triangulaire inférieure décomposée en $n \times n$ blocs, $n \geq 2$, définie par

$$\mathbb{B}_n = \begin{pmatrix} \mathbb{B}_{1,1} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{B}_{n,1} & \cdots & \mathbb{B}_{n,n-1} & \mathbb{B}_{n,n} \end{pmatrix}$$

Q. 3 Démontrer par récurrence sur n que

$$\det \mathbb{B}_n = \prod_{i=1}^n \det \mathbb{B}_{i,i}.$$

□

R. 3 On va alors démontrer par récurrence sur $n \geq 2$ la proposition suivante

$$(\mathcal{Q}_n) : \det \mathbb{B}_n = \prod_{i=1}^n \det \mathbb{B}_{i,i}.$$

- **Initialisation:** pour $n = 2$, cela a été fait en question 2.
- **Hérédité:** Soit $n \geq 2$, on suppose $(\mathcal{Q}_n)$ vraie et on va établir que $(\mathcal{Q}_{n+1})$ est vérifiée. On a

$$\mathbb{B}_{n+1} = \begin{pmatrix} \mathbb{B}_{1,1} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbb{B}_{n,1} & \cdots & \mathbb{B}_{n,n-1} & \mathbb{B}_{n,n} & \mathbb{O} \\ \mathbb{B}_{n+1,1} & \cdots & \mathbb{B}_{n+1,n} & \mathbb{B}_{n+1,n+1} & \vdots \end{pmatrix}$$

On note que les n premiers blocs lignes et colonnes de $\mathbb{B}_{n+1}$ correspondent à $\mathbb{B}_n$, et donc, on peut aussi écrire

$$\mathbb{B}_{n+1} = \begin{pmatrix} \mathbb{B}_n & \mathbb{O} \\ \bullet & \mathbb{B}_{n+1,n+1} \end{pmatrix}$$

D'après la question 2, on a

$$\det \mathbb{B}_{n+1} = \det \mathbb{B}_n \det \mathbb{B}_{n+1,n+1}.$$

Or, par hypothèse de récurrence, $(\mathcal{Q}_n)$ est vérifiée. On en déduit alors que

$$\det \mathbb{B}_{n+1} = \prod_{i=1}^n \det \mathbb{B}_{i,i} \det \mathbb{B}_{n+1,n+1},$$

et donc $(\mathcal{Q}_{n+1})$ est vraie.

- **Conclusion:** La proposition $(\mathcal{Q}_n)$ est vraie, pour tout $n \geq 2$.

2 Matrices

EXERCICE 6

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ une matrice et $(\lambda, \mathbf{u})$ un élément propre de $\mathbb{A}$ avec $\|\mathbf{u}\|_2 = 1$.

Q. 1 En s'aidant de la base canonique $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$, construire une base orthonormée $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ telle que $\mathbf{x}_1 = \mathbf{u}$. $\square$

R. 1 La première chose à faire est de construire une base contenant $\mathbf{u}$ à partir de la base canonique $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$. Comme le vecteur propre $\mathbf{u}$ est non nul, il existe $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\langle \mathbf{u}, \mathbf{e}_j \rangle \neq 0$. La famille $\{\mathbf{u}, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{j-1}, \mathbf{e}_{j+1}, \dots, \mathbf{e}_n\}$ forme alors une base de $\mathbb{C}^n$ car $\mathbf{u}$ n'est pas combinaison linéaire des $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{j-1}, \mathbf{e}_{j+1}, \dots, \mathbf{e}_n\}$.

On note $\{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n\}$ la base dont le premier élément est $\mathbf{z}_1 = \mathbf{u}$:

$$\{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n\} = \{\mathbf{u}, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{j-1}, \mathbf{e}_{j+1}, \dots, \mathbf{e}_n\}.$$

On peut ensuite utiliser le **procédé de Gram-Schmidt**, rappelé en Proposition B.35, pour construire une base orthonormée à partir de cette base.

On calcule successivement les vecteurs $\mathbf{x}_i$ à partir de la base $\{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n\}$ en construisant un vecteur $\mathbf{w}_i$ orthogonal aux vecteurs $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i-1}$.

$$\mathbf{w}_i = \mathbf{z}_i - \sum_{k=1}^{i-1} \langle \mathbf{x}_k, \mathbf{z}_i \rangle \mathbf{x}_k$$

puis on obtient le vecteur $\mathbf{x}_i$ en normalisant

$$\mathbf{x}_i = \frac{\mathbf{w}_i}{\|\mathbf{w}_i\|}$$

Notons $\mathbb{P}$ la matrice de changement de base canonique $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ dans la base $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$:

$$\mathbb{P} = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{x}_1 & \dots & \mathbf{x}_n \end{array} \right)$$

Soit $\mathbb{B}$ la matrice définie par $\mathbb{B} = \mathbb{P}^* \mathbb{A} \mathbb{P}$.

Q. 2 a. Exprimer les coefficients de la matrice $\mathbb{B}$ en fonction de la matrice $\mathbb{A}$ et des vecteurs $\mathbf{x}_i$, $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

$$\mathbb{B} = \mathbb{P}^* \mathbb{A} \mathbb{P}.$$

b. En déduire que la première colonne de $\mathbb{B}$ est $(\lambda, 0, \dots, 0)^t$. $\square$

R. 2 a. En conservant l'écriture colonne de la matrice $\mathbb{P}$ on obtient

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1^* \\ \mathbf{x}_2^* \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n^* \end{pmatrix} \mathbb{A} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \dots & \mathbf{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1^* \\ \mathbf{x}_2^* \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{A}\mathbf{x}_1 & \mathbb{A}\mathbf{x}_2 & \dots & \mathbb{A}\mathbf{x}_n \end{pmatrix}$$

Ce qui donne

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1^* \mathbb{A} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_1^* \mathbb{A} \mathbf{x}_2 & \dots & \mathbf{x}_1^* \mathbb{A} \mathbf{x}_n \\ \mathbf{x}_2^* \mathbb{A} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2^* \mathbb{A} \mathbf{x}_2 & \dots & \mathbf{x}_2^* \mathbb{A} \mathbf{x}_n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \mathbf{x}_n^* \mathbb{A} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_n^* \mathbb{A} \mathbf{x}_2 & \dots & \mathbf{x}_n^* \mathbb{A} \mathbf{x}_n \end{pmatrix}$$

On a donc

$$B_{i,j} = \mathbf{x}_i^* \mathbb{A} \mathbf{x}_j, \quad \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$$

b. On a $\mathbb{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$, $\|\mathbf{u}\| = 1$, la base $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ est orthonormée et $\mathbf{x}_1 = \mathbf{u}$. on obtient alors

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} \lambda\mathbf{u}^*\mathbf{u} & \mathbf{u}^*\mathbb{A}\mathbf{x}_2 & \dots & \mathbf{u}^*\mathbb{A}\mathbf{x}_n \\ \lambda\mathbf{x}_2^*\mathbf{u} & \mathbf{x}_2^*\mathbb{A}\mathbf{x}_2 & \dots & \mathbf{x}_2^*\mathbb{A}\mathbf{x}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda\mathbf{x}_n^*\mathbf{u} & \mathbf{x}_n^*\mathbb{A}\mathbf{x}_2 & \dots & \mathbf{x}_n^*\mathbb{A}\mathbf{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \mathbf{u}^*\mathbb{A}\mathbf{x}_2 & \dots & \mathbf{u}^*\mathbb{A}\mathbf{x}_n \\ 0 & \mathbf{x}_2^*\mathbb{A}\mathbf{x}_2 & \dots & \mathbf{x}_2^*\mathbb{A}\mathbf{x}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \mathbf{x}_n^*\mathbb{A}\mathbf{x}_2 & \dots & \mathbf{x}_n^*\mathbb{A}\mathbf{x}_n \end{pmatrix}$$

Q. 3 Par récurrence sur l'ordre de la matrice, montrer que la matrice $\mathbb{A}$ peut s'écrire sous la forme

$$\mathbb{A} = \mathbb{U}\mathbb{T}\mathbb{U}^*$$

où $\mathbb{U}$ est une matrice unitaire et $\mathbb{T}$ une matrice triangulaire supérieure. □

R. 3 On veut démontrer, par récurrence faible, la proposition suivante pour $n \geq 2$

$(\mathcal{P}_n)$ $\forall \mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\exists \mathbb{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ unitaire, $\exists \mathbb{T} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure, telles que $\mathbb{A} = \mathbb{U}\mathbb{T}\mathbb{U}^*$.

Initialisation : Montrons que $(\mathcal{P}_2)$ est vérifié.

Soit $\mathbb{A}_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Elle admet au moins un élément propre $(\lambda, \mathbf{u})$ (voir Proposition B.56 par ex.) avec $\|\mathbf{u}\| = 1$. On peut donc appliquer le résultat de la question précédente : il existe une matrice unitaire $\mathbb{P}_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que la matrice $\mathbb{B}_2 = \mathbb{P}_2\mathbb{A}_2\mathbb{P}_2^*$ ait comme premier vecteur colonne $(\lambda, 0)^t$. La matrice $\mathbb{B}_2$ est donc triangulaire supérieure et comme $\mathbb{P}_2$ est unitaire on en déduit

$$\mathbb{A}_2 = \mathbb{P}_2^*\mathbb{B}_2\mathbb{P}_2.$$

On pose $\mathbb{U}_2 = \mathbb{P}_2^*$ matrice unitaire et $\mathbb{T}_2 = \mathbb{B}_2$ matrice triangulaire supérieure pour conclure que la proposition $(\mathcal{P}_2)$ est vraie.

Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_{n-1})$ soit vérifiée. Montrons que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie.

Soit $\mathbb{A}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Elle admet au moins un élément propre $(\lambda, \mathbf{u})$ (voir Proposition B.56 par ex.) avec $\|\mathbf{u}\| = 1$. On peut donc appliquer le résultat de la question précédente : il existe une matrice unitaire $\mathbb{P}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que la matrice $\mathbb{B}_n = \mathbb{P}_n\mathbb{A}_n\mathbb{P}_n^*$ s'écrivent

$$\mathbb{B}_n = \begin{pmatrix} \lambda & & \mathbf{c}_{n-1}^* \\ 0 & & \\ \vdots & & \mathbb{A}_{n-1} \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

où $\mathbf{c}_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{C})$ et $\mathbb{A}_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$. Par hypothèse de récurrence, $\exists \mathbb{U}_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ unitaire et $\mathbb{T}_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure telles que

$$\mathbb{A}_{n-1} = \mathbb{U}_{n-1}\mathbb{T}_{n-1}\mathbb{U}_{n-1}^*$$

ou encore

$$\mathbb{T}_{n-1} = \mathbb{U}_{n-1}^*\mathbb{A}_{n-1}\mathbb{U}_{n-1}.$$

Soit $\mathbb{Q}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice définie par

$$\mathbb{Q}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{U}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

La matrice $\mathbb{Q}_n$ est unitaire. En effet on a

$$\mathbb{Q}_n\mathbb{Q}_n^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{U}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{U}_{n-1}^* & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \underbrace{\mathbb{U}_{n-1}\mathbb{U}_{n-1}^*}_{=\mathbb{I}_{n-1}} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \mathbb{I}_n.$$

On note $\mathbb{T}_n$ la matrice définie par $\mathbb{T}_n = \mathbb{Q}_n^* \mathbb{B}_n \mathbb{Q}_n$. On a alors

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{U}_{n-1}^* & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & \mathbf{c}_{n-1}^* \\ 0 & \\ \vdots & \mathbb{A}_{n-1} \\ 0 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{U}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda & \mathbf{c}_{n-1}^* \\ 0 & \\ \vdots & \mathbb{U}_{n-1}^* \mathbb{A}_{n-1} \\ 0 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{U}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \mathbf{c}_{n-1}^* \mathbb{U}_{n-1}^* \\ 0 & \\ \vdots & \underbrace{\mathbb{U}_{n-1}^* \mathbb{A}_{n-1} \mathbb{U}_{n-1}}_{=\mathbb{T}_{n-1}} \\ 0 & \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matrice $\mathbb{T}_n$ est donc triangulaire supérieure et on a par définition de $\mathbb{B}_n$

$$\mathbb{T}_n = \mathbb{Q}_n^* \mathbb{P}_n \mathbb{A}_n \mathbb{P}_n^* \mathbb{Q}_n.$$

On note $\mathbb{U}_n = \mathbb{P}_n^* \mathbb{Q}_n$. Cette matrice est unitaire car les matrices $\mathbb{Q}_n$ et $\mathbb{P}_n$ le sont. En effet, on a

$$\mathbb{U}_n \mathbb{U}_n^* = \mathbb{P}_n^* \mathbb{Q}_n (\mathbb{P}_n^* \mathbb{Q}_n)^* = \mathbb{P}_n^* \underbrace{\mathbb{Q}_n \mathbb{Q}_n^*}_{=\mathbb{I}_n} \mathbb{P}_n = \mathbb{P}_n^* \mathbb{P}_n = \mathbb{I}_n.$$

On a $\mathbb{T}_n = \mathbb{U}_n^* \mathbb{A}_n \mathbb{U}_n$ et en multipliant cette équation à gauche par $\mathbb{U}_n$ et à droite par $\mathbb{U}_n^*$ on obtient l'équation équivalente $\mathbb{A}_n = \mathbb{U}_n \mathbb{T}_n \mathbb{U}_n^*$. La propriété $(\mathcal{P}_n)$ est donc vérifiée. Ce qui achève la démonstration.

Q. 4 En supposant $\mathbb{A}$ inversible et la décomposition $\mathbb{A} = \mathbb{U}\mathbb{T}\mathbb{U}^*$ connue, expliquer comment résoudre "simplement" le système linéaire $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$. □

R. 4 Résoudre $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ est équivalent à résoudre

$$\mathbb{U}\mathbb{T}\mathbb{U}^*\mathbf{x} = \mathbf{b}. \tag{1}$$

Comme $\mathbb{U}$ est unitaire, on a $\mathbb{U}\mathbb{U}^* = \mathbb{I}$ et $\mathbb{U}^*$ inversible. Donc en multipliant (1) par $\mathbb{U}^*$ on obtient le système équivalent

$$\underbrace{\mathbb{U}^*\mathbb{U}}_{=\mathbb{I}} \mathbb{T}\mathbb{U}^*\mathbf{x} = \mathbb{U}^*\mathbf{b} \iff \mathbb{T}\mathbb{U}^*\mathbf{x} = \mathbb{U}^*\mathbf{b}.$$

On pose $\mathbf{y} = \mathbb{U}^*\mathbf{x}$. Le système précédent se résout en deux étapes

a. on cherche $\mathbf{y}$ solution de $\mathbb{T}\mathbf{y} = \mathbb{U}^*\mathbf{b}$. Comme $\mathbb{U}$ est unitaire on a $\det(\mathbb{U})\det(\mathbb{U}^*) = \det(\mathbb{I}) = 1$ et donc

$$\begin{aligned} \det(\mathbb{A}) &= \det(\mathbb{U}\mathbb{T}\mathbb{U}^*) = \det(\mathbb{U})\det(\mathbb{T})\det(\mathbb{U}^*) \\ &= \det(\mathbb{T}) \end{aligned}$$

Or $\mathbb{A}$ inversible équivaut à $\det(\mathbb{A}) \neq 0$ et donc la matrice $\mathbb{T}$ est inversible. La matrice $\mathbb{T}$ étant triangulaire supérieure on peut résoudre facilement le système par la *méthode de remontée*.

b. une fois $\mathbf{y}$ déterminé, on résout $\mathbb{U}^*\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Comme $\mathbb{U}$ est unitaire, on obtient directement $\mathbf{x} = \mathbb{U}\mathbf{y}$.

3 Normes

EXERCICE 7

Soient $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ deux vecteurs de $\mathbb{C}^n$.

Q. 1 Trouver $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\langle \alpha \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = 0$. □

R. 1 • Si $\mathbf{x} = 0$, alors α quelconque.

• Si $\mathbf{x} \neq 0$, alors

$$\langle \alpha \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = 0 \iff \bar{\alpha} \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = 0$$

Or $\mathbf{x} \neq 0$, ce qui donne

$$\bar{\alpha} = \frac{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}.$$

et, comme $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \in \mathbb{R}$ et $\overline{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$, on obtient

$$\alpha = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}. \quad (2)$$

Q. 2 En calculant $\|\alpha \mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2$, montrer que

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2. \quad (3)$$

□

R. 2 On a

$$\begin{aligned} \|\alpha \mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 &= \langle \alpha \mathbf{x} - \mathbf{y}, \alpha \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle \\ &= \alpha \langle \alpha \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle - \langle \alpha \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\ &= -\langle \alpha \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle, \text{ car } \langle \alpha \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = 0 \\ &= -\bar{\alpha} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \end{aligned}$$

En utilisant (2), on obtient alors

$$\begin{aligned} \|\alpha \mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 &= -\frac{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\ &= \frac{-\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} \end{aligned}$$

Comme $\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}$, on a $\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^2$ et donc

$$\begin{aligned} \|\alpha \mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 &= \frac{1}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} \left(-|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^2 + \|\mathbf{x}\|_2^2 \|\mathbf{y}\|_2^2 \right) \\ &\geq 0. \end{aligned} \quad (4)$$

On a alors

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^2 \leq \|\mathbf{x}\|_2^2 \|\mathbf{y}\|_2^2$$

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ étant croissante sur $[0; +\infty[$, on obtient (3).

Q. 3 Soit $\mathbf{x} \neq 0$. Montrer alors que l'inégalité (3) est une égalité si et seulement si $\mathbf{y} = \alpha \mathbf{x}$. $\square$

R. 3 Soit $\mathbf{x} \neq 0$. On veut montrer que

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| = \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2 \iff \mathbf{y} = \alpha \mathbf{x}$$

$\Leftarrow$ On suppose $\mathbf{y} = \alpha \mathbf{x}$. On a alors

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \alpha \|\mathbf{x}\|_2^2 \implies |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| = |\alpha| \|\mathbf{x}\|_2^2.$$

Comme $\|\mathbf{y}\|_2 = |\alpha| \|\mathbf{x}\|_2$, on a aussi

$$\|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2 = |\alpha| \|\mathbf{x}\|_2^2.$$

On en déduit alors

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| = \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2.$$

$\Rightarrow$ On suppose $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| = \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2$. Avec cette hypothèse, l'équation (4) devient

$$\|\alpha \mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 = 0$$

et donc $\alpha \mathbf{x} - \mathbf{y} = 0$, c'est à dire $\mathbf{y} = \alpha \mathbf{x}$.

EXERCICE 8

Q. 1 Soit la fonction $f(t) = (1 - \lambda) + \lambda t - t^\lambda$ avec $0 < \lambda < 1$. Montrer que pour tous $\alpha \geq 0$ et $\beta \geq 0$ on a

$$\alpha^\lambda \beta^{1-\lambda} \leq \lambda \alpha + (1 - \lambda) \beta. \quad (5)$$

$\square$

R. 1 L'inégalité (5) est vérifiée si $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$. Il nous reste donc à la vérifier pour $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Dans ce cas (5) s'écrit

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\lambda \leq \lambda \frac{\alpha}{\beta} + (1 - \lambda)$$

c'est à dire

$$f\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \geq 0.$$

Montrons que $f(t) \geq 0, \forall t \in]0, +\infty[$.

On a $f'(t) = \lambda(1 - t^{\lambda-1})$ et

$$f'(t) = 0 \iff 1 - t^{\lambda-1} = 0, \text{ car } \lambda \neq 0$$

De plus, on a $t^{\lambda-1} = e^{(\lambda-1) \ln(t)}$ et comme $\lambda - 1 \neq 0$, on obtient

$$f'(t) = 0 \iff t = 1.$$

- Etudions la fonction sur $]0, 1[$. On a pour $t \in]0, 1[$, $\ln(t) < 0$ et donc $(\lambda - 1)\ln(t) > 0$. Comme la fonction $\exp$ est croissante, on en déduit $\exp((\lambda - 1)\ln(t)) > 1$ et alors $f'(t) < 0$.
- Etudions la fonction sur $]1, +\infty[$. On a pour $t \in]1, +\infty[$, $\ln(t) > 0$ et donc $(\lambda - 1)\ln(t) < 0$. Comme la fonction $\exp$ est croissante, on en déduit $0 < \exp((\lambda - 1)\ln(t)) < 1$ et alors $f'(t) > 0$.

Le minimum de f est donc atteint en $t = 1$ et on a

$$\forall t \in]0, +\infty[, f(t) \geq f(1) = 0.$$

L'inégalité (5) est donc vérifiée $\forall \alpha \geq 0, \forall \beta \geq 0$ et $\forall \lambda \in]0, 1[$.

Soient $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ deux vecteurs non nuls de $\mathbb{C}^n$. Soient $p > 1$ et $q > 1$ vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Q. 2 On pose $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_p}$ et $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|_q}$. En utilisant l'inégalité (5), montrer que l'on a l'inégalité

$$\sum_{i=1}^n |u_i v_i| \leq \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n |u_i|^p + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^n |v_i|^q = 1. \quad (6)$$

□

R. 2 On pose $\lambda = \frac{1}{p} \in]0, 1[$. on a alors $1 - \lambda = \frac{1}{q}$. On pose

$$\alpha = |u_i|^p \geq 0, \quad \beta = |v_i|^q \geq 0.$$

En utilisant (5), on obtient directement

$$|u_i| |v_i| \leq \frac{1}{p} |u_i|^p + \frac{1}{q} |v_i|^q, \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

En sommant sur i on obtient:

$$\sum_{i=1}^n |u_i v_i| \leq \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n |u_i|^p + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^n |v_i|^q = \frac{1}{p} \|\mathbf{u}\|_p^p + \frac{1}{q} \|\mathbf{v}\|_q^q$$

Comme par construction $\|\mathbf{u}\|_p = \|\mathbf{v}\|_q = 1$, on obtient

$$\sum_{i=1}^n |u_i v_i| \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Q. 3 En déduire l'inégalité de Hölder suivante

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \|\mathbf{x}\|_p \|\mathbf{y}\|_q. \quad (7)$$

Quel est le lien entre l'inégalité de Hölder et l'inégalité de Cauchy-Schwarz?

□

R. 3 Par construction, on a

$$\sum_{i=1}^n |u_i v_i| = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|_p \|\mathbf{y}\|_q} \sum_{i=1}^n |x_i y_i|$$

et donc en utilisant l'inégalité (7) on obtient

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$

De plus

$$|\langle x, y \rangle| = \left| \sum_{i=1}^n \bar{x}_i y_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |\bar{x}_i y_i| = \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$

Pour $p = q = 2$, l'inégalité de Hölder entraîne l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

EXERCICE 9

Etant donné une norme vectorielle $\|\bullet\|$ sur $\mathbb{K}^n$, on définit l'application $\|\bullet\|_s : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{R}^+$ par

$$\|A\|_s \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{v \in \mathbb{K}^n \\ v \neq 0}} \frac{\|Av\|}{\|v\|} \quad (8)$$

Q. 1 Montrer que $\|I\|_s = 1$. □

R. 1 On a immédiatement

$$\|I\|_s = \sup_{\substack{v \in \mathbb{K}^n \\ v \neq 0}} \frac{\|Iv\|}{\|v\|} = \sup_{\substack{v \in \mathbb{K}^n \\ v \neq 0}} \frac{\|v\|}{\|v\|} = 1.$$

On note $\mathcal{B} = \{v \in \mathbb{K}^n ; \|v\| \leq 1\}$ la boule unité de $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{S} = \{v \in \mathbb{K}^n ; \|v\| = 1\}$ la sphère unité de $\mathbb{K}^n$.

Q. 2 a. Montrer que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{S}$ sont des compacts.

b. Montrer que

$$\|A\|_s = \sup_{v \in \mathcal{S}} \|Av\| \quad (9)$$

c. En déduire que

$$\|A\|_s = \sup_{v \in \mathcal{B}} \|Av\| \quad (10)$$

d. En déduire que l'application $\|\bullet\|_s$ est bien définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ i.e. $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \|A\|_s < +\infty$. □

R. 2 a. Les ensembles $\mathcal{B}$ et $\mathcal{S}$ sont des compacts car image réciproque de l'application continue $v \mapsto \|v\|$ par le fermé borné $[0, 1]$ (pour la boule) et le singleton $\{1\}$ (pour la sphère).

b. On a

$$\|A\|_s = \sup_{\substack{v \in \mathbb{K}^n \\ v \neq 0}} \frac{\|Av\|}{\|v\|} = \sup_{\substack{v \in \mathbb{K}^n \\ v \neq 0}} \left\| A \frac{v}{\|v\|} \right\| = \sup_{u \in \mathcal{S}} \|Au\|$$

c. Comme $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}$ on a aussi

$$\sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{B}} \|\mathbb{A}\mathbf{v}\| \geq \sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{S}} \|\mathbb{A}\mathbf{v}\|. \quad (11)$$

On peut aussi remarquer que

$$\sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{B}} \|\mathbb{A}\mathbf{v}\| = \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathcal{B} \\ \mathbf{v} \neq 0}} \|\mathbb{A}\mathbf{v}\| \quad (12)$$

De plus, $\forall \mathbf{w} \in \mathcal{B} \setminus \{0\}$, en posant $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|} \in \mathcal{S}$, on a $\mathbf{w} = \|\mathbf{w}\| \mathbf{u}$ et

$$\|\mathbb{A}\mathbf{w}\| = \|\mathbf{w}\| \|\mathbb{A}\mathbf{u}\| \leq \|\mathbb{A}\mathbf{u}\| \text{ car } \|\mathbf{w}\| \leq 1.$$

Or on a

$$\|\mathbb{A}\mathbf{u}\| \leq \sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{S}} \|\mathbb{A}\mathbf{v}\|.$$

et on obtient alors

$$\sup_{\substack{\mathbf{w} \in \mathcal{B} \\ \mathbf{w} \neq 0}} \|\mathbb{A}\mathbf{w}\| \leq \sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{S}} \|\mathbb{A}\mathbf{v}\|.$$

En utilisant (11) et (12), on en déduit

$$\sup_{\mathbf{w} \in \mathcal{B}} \|\mathbb{A}\mathbf{w}\| = \sup_{\mathbf{u} \in \mathcal{S}} \|\mathbb{A}\mathbf{u}\|.$$

d. L'application $\mathbf{v} \mapsto \|\mathbb{A}\mathbf{v}\|$ est continue donc son sup sur la sphère unité qui est compacte est atteint.

Q. 3 a. Montrer

$$\|\mathbb{A}\|_s \leq \inf \{ \alpha \in \mathbb{R} : \|\mathbb{A}\mathbf{v}\| \leq \alpha \|\mathbf{v}\|, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \}.$$

b. Montrer qu'il existe $\mathbf{w} \in \mathcal{S}$ tel que $\|\mathbb{A}\|_s = \|\mathbb{A}\mathbf{w}\|$.

c. En déduire que

$$\|\mathbb{A}\|_s = \inf \{ \alpha \in \mathbb{R} : \|\mathbb{A}\mathbf{v}\| \leq \alpha \|\mathbf{v}\|, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \}. \quad (13)$$

□

R. 3 a. Comme $\|\bullet\|_s$ est bien définie il existe $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tel que $\|\mathbb{A}\|_s \leq \alpha$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tel que $\|\mathbb{A}\|_s \leq \alpha$. On a

$$\begin{aligned} \|\mathbb{A}\|_s \leq \alpha &\Leftrightarrow \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} \leq \alpha \\ &\Leftrightarrow \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} \leq \alpha, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} \\ &\Leftrightarrow \|\mathbb{A}\mathbf{v}\| \leq \alpha \|\mathbf{v}\|, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} \\ &\Leftrightarrow \|\mathbb{A}\mathbf{v}\| \leq \alpha \|\mathbf{v}\|, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\|\mathbb{A}\|_s \leq \inf \{ \alpha \in \mathbb{R} : \|\mathbb{A}\mathbf{v}\| \leq \alpha \|\mathbf{v}\|, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \} \quad (14)$$

b. Comme $\mathcal{S}$ est compact et l'application $\mathbf{v} \mapsto \|\mathbb{A}\mathbf{v}\|$ est continue, il existe $\mathbf{w} \in \mathcal{S}$ tel que

$$\|\mathbb{A}\|_s = \sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{S}} \|\mathbb{A}\mathbf{v}\| = \|\mathbb{A}\mathbf{w}\|.$$

c. On en déduit $\|\mathbb{A}\|_s \|\mathbf{w}\| = \|\mathbb{A}\mathbf{w}\|$ car $\|\mathbf{w}\| = 1$. On a alors

$$\|\mathbb{A}\|_s \in \{ \alpha \in \mathbb{R} : \|\mathbb{A}\mathbf{v}\| \leq \alpha \|\mathbf{v}\|, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \}$$

et donc

$$\inf \{ \alpha \in \mathbb{R} : \|\mathbb{A}\mathbf{v}\| \leq \alpha \|\mathbf{v}\|, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \} \leq \|\mathbb{A}\|_s.$$

On conclut en utilisant (14).

Q. 4 a. Montrer que $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n$, $\|\mathbb{A}\mathbf{v}\| \leq \|\mathbb{A}\|_s \|\mathbf{v}\|$.

b. Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Montrer qu'il existe $\mathbf{u} \in \mathbb{K}^n$ tel que $\|\mathbf{u}\| = |\lambda|$ vérifiant

$$\|\mathbb{A}\mathbf{u}\| = \|\mathbb{A}\|_s \|\mathbf{u}\|.$$

□

R. 4 a. On a par définition du sup

$$\|\mathbb{A}\|_s = \sup_{\substack{\mathbf{u} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{u} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|} \geq \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}.$$

et donc

$$\|\mathbb{A}\mathbf{v}\| \leq \|\mathbb{A}\|_s \|\mathbf{v}\|, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}.$$

qui est équivalent à

$$\|\mathbb{A}\mathbf{v}\| \leq \|\mathbb{A}\|_s \|\mathbf{v}\|, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n.$$

b. D'après la **Q. 3** b. ,il existe $\mathbf{w} \in \mathcal{S}$ tel que $\|\mathbb{A}\|_s = \|\mathbb{A}\mathbf{w}\|$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $\mathbf{u} = \lambda \mathbf{w} \neq 0$. On a $\|\mathbf{u}\| = |\lambda|$ et

$$\|\mathbb{A}\|_s = \|\mathbb{A}\mathbf{w}\| = \left\| \mathbb{A} \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} \right\| = \frac{1}{\|\mathbf{u}\|} \|\mathbb{A}\mathbf{u}\| \Leftrightarrow \|\mathbb{A}\|_s \|\mathbf{u}\| = \|\mathbb{A}\mathbf{u}\|$$

Q. 5 Montrer que $\|\bullet\|_s$ est une norme matricielle.

□

R. 5 • $\|\mathbb{A}\|_s = 0 \iff \mathbb{A}_s = \mathbb{O}$?

$\boxed{\Leftarrow}$ trivial.

$\boxed{\Rightarrow}$ Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\begin{aligned} \|\mathbb{A}\|_s = 0 &= \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} \implies \|\mathbb{A}\mathbf{v}\| = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} \\ &\implies \mathbb{A}\mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} \end{aligned}$$

Soit $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. On a alors $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\mathbb{A}\mathbf{e}_j = \mathbf{0}$ et on en déduit que

$$A_{i,j} = \langle \mathbf{e}_i, \mathbb{A}\mathbf{e}_j \rangle = 0, \quad \forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

et donc $\mathbb{A} = \mathbb{O}$.

• Montrons que $\|\alpha\mathbb{A}\| = |\alpha| \|\mathbb{A}\|$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall \mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Soient $\alpha \in \mathbb{K}$ et $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a $\alpha\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (car $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel) et

$$\begin{aligned} \|\alpha\mathbb{A}\|_s &= \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|\alpha\mathbb{A}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{|\alpha| \|\mathbb{A}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} \quad \text{car } \|\alpha\mathbf{u}\| = |\alpha| \|\mathbf{u}\| \\ &= |\alpha| \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = |\alpha| \|\mathbb{A}\|_s. \end{aligned}$$

- Montrons que $\|\mathbb{A} + \mathbb{B}\|_s \leq \|\mathbb{A}\|_s + \|\mathbb{B}\|_s$, $\forall (\mathbb{A}, \mathbb{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$
Soient $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a $\mathbb{A} + \mathbb{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ car $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel et

$$\begin{aligned} \|\mathbb{A} + \mathbb{B}\|_s &= \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|(\mathbb{A} + \mathbb{B})\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{v} + \mathbb{B}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} \\ &\leq \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{v}\| + \|\mathbb{B}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} \quad \text{par inégalité triangulaire dans } \mathbb{K}^n \\ &\leq \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} + \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{B}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \|\mathbb{A}\|_s + \|\mathbb{B}\|_s. \end{aligned}$$

- Montrons que $\|\mathbb{A}\mathbb{B}\|_s \leq \|\mathbb{A}\|_s \|\mathbb{B}\|_s$, $\forall (\mathbb{A}, \mathbb{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$.
Soient $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a $\mathbb{A}\mathbb{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par définition du produit matriciel et

$$\begin{aligned} \|\mathbb{A}\mathbb{B}\|_s &= \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|(\mathbb{A}\mathbb{B})\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}(\mathbb{B}\mathbf{v})\|}{\|\mathbf{v}\|} \\ &\leq \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\|_s \|\mathbb{B}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} \quad \text{car } \|\mathbb{A}\mathbf{u}\| \leq \|\mathbb{A}\|_s \|\mathbf{u}\| \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{K}^n \\ &\leq \|\mathbb{A}\|_s \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{B}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \|\mathbb{A}\|_s \|\mathbb{B}\|_s. \end{aligned}$$

EXERCICE 10

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note

$$\|\mathbb{A}\|_1 \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \\ \mathbf{x} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{x}\|_1}{\|\mathbf{x}\|_1} = \sup_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \\ \|\mathbf{x}\|_1 = 1}} \|\mathbb{A}\mathbf{x}\|_1$$

la norme matricielle subordonnée à la norme vectorielle $\|\bullet\|_1$.

Q. 1 Montrer que

$$\sup_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \\ \|\mathbf{x}\|_1 = 1}} \|\mathbb{A}\mathbf{x}\|_1 \leq \max_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{i=1}^n |A_{i,j}|.$$

□

R. 1 Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ tel que $\|\mathbf{x}\|_1 = 1$. On a

$$\begin{aligned} \|\mathbb{A}\mathbf{x}\|_1 &= \sum_{i=1}^n |(\mathbb{A}\mathbf{x})_i| = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n A_{i,j} x_j \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |A_{i,j} x_j| = \sum_{j=1}^n \left(|x_j| \sum_{i=1}^n |A_{i,j}| \right) \\ &\leq \left(\max_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{i=1}^n |A_{i,j}| \right) \sum_{j=1}^n |x_j| = \max_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{i=1}^n |A_{i,j}| \quad \text{car } \|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j| = 1. \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\sup_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \\ \|\mathbf{x}\|_1 = 1}} \|\mathbb{A}\mathbf{x}\|_1 \leq \max_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{i=1}^n |A_{i,j}|.$$

Q. 2 a. Déterminer un $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$, $\|\mathbf{y}\|_1 = 1$ tel que

$$\|\mathbb{A}\mathbf{y}\|_1 = \max_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{i=1}^n |A_{i,j}|.$$

b. Conclure. □

R. 2 a. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que

$$\sum_{i=1}^n |A_{i,k}| = \max_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{i=1}^n |A_{i,j}|.$$

On a

$$\|\mathbb{A}\mathbf{y}\|_1 = \sum_{i=1}^n |(\mathbb{A}\mathbf{y})_i| = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n A_{i,j} y_j \right|.$$

Pour obtenir

$$\sum_{i=1}^n |A_{i,k}| = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n A_{i,j} y_j \right|$$

on prend $y_j = \delta_{k,j}$, $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, c'est à dire $\mathbf{y} = \mathbf{e}_k$ le $k^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique. Dans ce cas on a $\|\mathbf{y}\|_1 = 1$ et

$$\begin{aligned} \|\mathbb{A}\mathbf{y}\|_1 &= \|\mathbb{A}\mathbf{e}_k\|_1 = \|\mathbb{A}_{:,k}\|_1 \\ &= \sum_{i=1}^n |A_{i,k}| = \max_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{i=1}^n |A_{i,j}|. \end{aligned}$$

b. D'après la proposition/définition des normes matricielles subordonnées, on a

$$\|\mathbb{A}\|_1 = \sup_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \\ \|\mathbf{x}\|_1 = 1}} \|\mathbb{A}\mathbf{x}\|_1.$$

En utilisant les résultats de **Q.1** et **Q.2**, on obtient

$$\|\mathbb{A}\|_1 = \max_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{i=1}^n |A_{i,j}|.$$

Q. 3 [Algo] Ecrire une fonction algorithmique, nommée **Norm1**, calculant $\|\mathbb{A}\|_1$. □

R. 3 Voici une possibilité de fonction:

Algorithme 1 Fonction Norm1 permettant de calculer $\|\mathbb{A}\|_1$

Données : $\mathbb{A}$: matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Résultat : r : le réel $r = \max_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|$

```

1: Fonction  $r \leftarrow \text{Norm1}(\mathbb{A})$ 
2:    $n \leftarrow$  nb de lignes de  $\mathbb{A}$ 
3:    $r \leftarrow 0$ 
4:   Pour  $j \leftarrow 1$  à  $n$  faire
5:      $S \leftarrow 0$ 
6:     Pour  $i \leftarrow 1$  à  $n$  faire
7:        $S \leftarrow S + |\mathbb{A}(i, j)|$ 
8:     Fin Pour
9:     Si  $r < S$  alors
10:       $r \leftarrow S$ 
11:     Fin Si
12:   Fin Pour
13: Fin Fonction

```

EXERCICE 11

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note

$$\|\mathbb{A}\|_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \\ \mathbf{x} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{x}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty}$$

la norme matricielle subordonnée à la norme vectorielle $\|\bullet\|_\infty$.

Q. 1 Montrer que

$$\sup_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \\ \|\mathbf{x}\|_\infty = 1}} \|\mathbb{A}\mathbf{x}\|_\infty \leq \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{j=1}^n |A_{i,j}|.$$

□

R. 1 Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ tel que $\|\mathbf{x}\|_\infty = 1$. On a

$$\begin{aligned} \|\mathbb{A}\mathbf{x}\|_\infty &= \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |(\mathbb{A}\mathbf{x})_i| = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \left| \sum_{j=1}^n A_{i,j} x_j \right| \\ &\leq \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{j=1}^n |A_{i,j}| |x_j| \\ &\leq \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{j=1}^n |A_{i,j}| \quad \text{car } |x_j| \leq \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |x_i| = \|\mathbf{x}\|_\infty = 1. \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\sup_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \\ \|\mathbf{x}\|_\infty = 1}} \|\mathbb{A}\mathbf{x}\|_\infty \leq \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{j=1}^n |A_{i,j}|.$$

Q. 2 a. Déterminer un $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$, $\|\mathbf{y}\|_\infty = 1$ tel que

$$\|\mathbb{A}\mathbf{y}\|_\infty = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{j=1}^n |A_{i,j}|.$$

b. Conclure. □

R. 2 a. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que

$$\sum_{j=1}^n |A_{k,j}| = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{j=1}^n |A_{i,j}|.$$

On a, pour tout $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$,

$$\|\mathbb{A}\mathbf{y}\|_\infty = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |(\mathbb{A}\mathbf{y})_i| = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \left| \sum_{j=1}^n A_{i,j} y_j \right|.$$

On va construire un vecteur $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$, $\|\mathbf{y}\|_\infty = 1$, tel que

$$\max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \left| \sum_{j=1}^n A_{i,j} y_j \right| = \sum_{j=1}^n |A_{k,j}|.$$

On sait déjà que, si $\|\mathbf{y}\|_\infty = 1$,

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \left| \sum_{j=1}^n A_{i,j} y_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |A_{k,j}|.$$

On va donc construire $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$, $\|\mathbf{y}\|_\infty = 1$, de telle sorte que

$$\left| \sum_{j=1}^n A_{k,j} y_j \right| = \sum_{j=1}^n |A_{k,j}|.$$

Il suffit pour cela de prendre,

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad y_j = \begin{cases} \frac{|A_{k,j}|}{A_{k,j}} & \text{si } A_{k,j} \neq 0 \\ 1 & \text{si } A_{k,j} = 0 \end{cases}.$$

et on a bien $\|\mathbf{y}\|_\infty = 1$. On a alors

$$\left| \sum_{j=1}^n A_{k,j} y_j \right| = \sum_{j=1}^n |A_{k,j}| \quad \text{et} \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \left| \sum_{j=1}^n A_{i,j} y_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |A_{k,j}|$$

et donc

$$\|\mathbb{A}\mathbf{y}\|_\infty = \sum_{j=1}^n |A_{k,j}| = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{j=1}^n |A_{i,j}|.$$

b. D'après la proposition/définition des normes matricielles subordonnées, on a

$$\|\mathbb{A}\|_\infty = \sup_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \\ \|\mathbf{x}\|_\infty = 1}} \|\mathbb{A}\mathbf{x}\|_\infty.$$

En utilisant les résultats de **Q.1** et **Q.2**, on obtient

$$\|\mathbb{A}\|_\infty = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{j=1}^n |A_{i,j}|.$$

Q. 3 [Algo] Ecrire une fonction algorithmique, nommée *NormInf*, calculant $\|\mathbb{A}\|_\infty$. □

R. 3 Voici une possibilité de fonction:

Algorithme 2 Fonction *NormInf* permettant de calculer $\|\mathbb{A}\|_\infty$

Données : $\mathbb{A}$: matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Résultat : r : le réel $r = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$

```
1: Fonction  $r \leftarrow \text{NormInf}(\mathbb{A})$ 
2:    $n \leftarrow$  nb de lignes de  $\mathbb{A}$ 
3:    $r \leftarrow 0$ 
4:   Pour  $i \leftarrow 1$  à  $n$  faire
5:      $S \leftarrow 0$ 
6:     Pour  $j \leftarrow 1$  à  $n$  faire
7:        $S \leftarrow S + |\mathbb{A}(i, j)|$ 
8:     Fin Pour
9:     Si  $r < S$  alors
10:       $r \leftarrow S$ 
11:     Fin Si
12:   Fin Pour
13: Fin Fonction
```

EXERCICE 12

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\mathbb{B} = \mathbb{A}^* \mathbb{A}$.

Q. 1 Soit $(\lambda, \mathbf{u}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ un élément propre de $\mathbb{B}$.

- Montrer que la matrice $\mathbb{B}$ est hermitienne.
- Montrer que les valeurs propres de $\mathbb{B}$ sont réelles.
- En déduire que

$$\lambda = \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{u}\|_2^2}{\|\mathbf{u}\|_2^2}.$$

□

R. 1 a. Il faut montrer que $\mathbb{B} = \mathbb{B}^*$. Or on a

$$\mathbb{B}^* = (\mathbb{A}^* \mathbb{A})^* = \mathbb{A}^* (\mathbb{A}^*)^* = \mathbb{A}^* \mathbb{A} = \mathbb{B}.$$

b. Comme $(\lambda, \mathbf{u})$ est un élément propre de $\mathbb{B}$, on a $\mathbb{B}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$. On en déduit que

$$\langle \mathbb{B}\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \langle \lambda\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \bar{\lambda} \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \bar{\lambda} \|\mathbf{u}\|_2^2.$$

De plus par propriété du produit scalaire, on a

$$\langle \mathbb{B}\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbb{B}^*\mathbf{u} \rangle.$$

Comme $\mathbb{B}$ est hermitienne, on obtient

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{B}\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle &= \langle \mathbf{u}, \mathbb{B}\mathbf{u} \rangle \\ &= \langle \mathbf{u}, \lambda\mathbf{u} \rangle = \lambda \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \lambda \|\mathbf{u}\|_2^2. \end{aligned}$$

On a donc

$$\lambda \|\mathbf{u}\|_2^2 = \bar{\lambda} \|\mathbf{u}\|_2^2$$

et comme $\|\mathbf{u}\|_2 \neq 0$ ($\mathbf{u}$ est un vecteur propre) on obtient $\lambda = \bar{\lambda}$, c'est à dire $\lambda \in \mathbb{R}$.

c. On a

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{B}\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle &= \langle \mathbb{A}^*\mathbb{A}\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \\ &= \langle \mathbb{A}\mathbf{u}, \mathbb{A}\mathbf{u} \rangle \quad \text{par propriété du produit scalaire} \\ &= \|\mathbb{A}\mathbf{u}\|_2^2. \end{aligned}$$

De plus, on a vu que $\langle \mathbb{B}\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \lambda \|\mathbf{u}\|_2^2$ avec $\|\mathbf{u}\|_2 > 0$. On en déduit alors

$$\lambda = \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{u}\|_2^2}{\|\mathbf{u}\|_2^2} \geq 0.$$

La matrice $\mathbb{B}$ étant hermitienne (elle est donc normale), d'après le Théorème de réduction 3.2 page 63, il existe alors une matrice $\mathbb{U}$ unitaire et une matrice $\mathbb{D}$ diagonale telle que

$$\mathbb{B} = \mathbb{U}\mathbb{D}\mathbb{U}^*.$$

On note $(\lambda_i, \mathbf{e}_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ les éléments propres de $\mathbb{D}$. Les vecteurs $\mathbf{e}_i$ sont les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{C}^n$ et $\lambda_i = \mathbb{D}_{ii}$.

Q. 2 a. Démontrer que les $(\lambda_i, \mathbf{v}_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ sont les éléments propres de $\mathbb{B}$ où $\mathbf{v}_i$ est le i -ème vecteur colonne de $\mathbb{U}$.

b. En déduire que $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ est une base orthonormée de $\mathbb{C}^n$.

□

R. 2 a. On a $\mathbb{B} = \mathbb{U}\mathbb{D}\mathbb{U}^*$. Or $\mathbb{U}$ est unitaire, donc inversible d'inverse $\mathbb{U}^*$. En multipliant à gauche par $\mathbb{U}^*$ et à droite par $\mathbb{U}$ on obtient

$$\mathbb{U}^*\mathbb{B}\mathbb{U} = \mathbb{U}^*(\mathbb{U}\mathbb{D}\mathbb{U}^*)\mathbb{U} = (\mathbb{U}^*\mathbb{U})\mathbb{D}(\mathbb{U}^*\mathbb{U}) = \mathbb{D}.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} \mathbb{D}\mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i &\iff \mathbb{U}^*\mathbb{B}\mathbb{U}\mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i \\ &\iff \mathbb{B}\mathbb{U}\mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbb{U}\mathbf{e}_i. \end{aligned}$$

C'est à dire en posant $\mathbf{v}_i = \mathbb{U}\mathbf{e}_i$ (i -ème vecteur colonne de $\mathbb{U}$), les éléments propres de $\mathbb{B}$ sont les $(\lambda_i, \mathbf{v}_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$. On peut noter que $\mathbf{v}_i \neq 0$ car $\mathbb{U}$ est inversible.

b. On a

$$\mathbb{U} = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{v}_1 & \dots & \mathbf{v}_n \end{array} \right) \text{ et } \mathbb{U}^* = \left(\begin{array}{c} \mathbf{v}_1^* \\ \mathbf{v}_2^* \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n^* \end{array} \right)$$

On a donc

$$\mathbb{U}^* \mathbb{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1^* \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1^* \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{v}_1^* \mathbf{v}_n \\ \mathbf{v}_2^* \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2^* \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{v}_2^* \mathbf{v}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{v}_n^* \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_n^* \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{v}_n^* \mathbf{v}_n \end{pmatrix}$$

et donc

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad (\mathbb{U}^* \mathbb{U})_{i,j} = \mathbf{v}_i^* \mathbf{v}_j = \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle.$$

Comme $\mathbb{U}$ est unitaire, on a $\mathbb{U}^* \mathbb{U} = \mathbb{I}$ et donc

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad (\mathbb{U}^* \mathbb{U})_{i,j} = \delta_{i,j}.$$

On en déduit alors

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \delta_{i,j}.$$

$\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ est donc une base orthonormée de $\mathbb{C}^n$.

Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ tel que $\|\mathbf{x}\|_2 = 1$ décomposée dans la base $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$:

$$\exists (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n, \quad \text{tels que } \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i.$$

Q. 3 a. Montrer que

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 = 1.$$

b. Montrer que

$$\sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \\ \|\mathbf{v}\|_2 = 1}} \|\mathbb{A} \mathbf{v}\|_2^2 \leq \rho(\mathbb{A}^* \mathbb{A}).$$

c. Déterminer un vecteur $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$, tel que

$$\|\mathbb{A} \mathbf{w}\|_2^2 = \rho(\mathbb{A}^* \mathbb{A}).$$

d. En déduire que

$$\|\mathbb{A}\|_2 \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \\ \mathbf{x} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A} \mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} = \sqrt{\rho(\mathbb{A}^* \mathbb{A})}.$$

□

R. 3 a. On peut voir que

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{v}_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \overline{\alpha_i} \alpha_j \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \overline{\alpha_i} \alpha_i \quad \text{car } \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \delta_{i,j} \\ &= \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2. \end{aligned}$$

De plus $\|\mathbf{x}\|_2^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 1$.

b. On a

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{A}\mathbf{x}\|_2^2 &= \langle \mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbb{A}\mathbf{x} \rangle = \langle \mathbb{A}^* \mathbb{A} \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbb{B}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{B}\mathbf{v}_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{v}_j \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i \mathbf{v}_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{v}_j \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \overline{\alpha_i} \lambda_i \sum_{j=1}^n \alpha_j \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \lambda_i |\alpha_i|^2 \quad \text{car } \lambda_i \in \mathbb{R} \text{ et } \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \delta_{ij} \\
&\leq \left(\max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \lambda_i \right) \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 = \rho(\mathbb{A}^* \mathbb{A}) \quad \text{car } \lambda_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 = 1.
\end{aligned}$$

On en déduit alors

$$\sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \\ \|\mathbf{v}\|_2 = 1}} \|\mathbb{A}\mathbf{v}\|_2^2 \leq \rho(\mathbb{A}^* \mathbb{A}).$$

c. Pour démontrer que l'on a en fait égalité il suffit de trouver un vecteur la vérifiant, c'est à dire un vecteur $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$, $\|\mathbf{w}\|_2 = 1$, tel que

$$\|\mathbb{A}\mathbf{w}\|_2^2 = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \lambda_i$$

où les λ_i sont positifs ou nuls (valeurs propres de $\mathbb{B}$. Pour cela on note $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ l'indice tel que $\lambda_k = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \lambda_i$. En choisissant $\mathbf{w} = \mathbf{v}_k$ (qui est de norme 1) on obtient alors

$$\|\mathbb{A}\mathbf{v}_k\|_2^2 = \langle \mathbb{A}\mathbf{v}_k, \mathbb{A}\mathbf{v}_k \rangle = \langle \mathbb{A}^* \mathbb{A} \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_k \rangle = \langle \lambda_k \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_k \rangle = \lambda_k = \rho(\mathbb{A}^* \mathbb{A}).$$

d. D'après la proposition/définition des normes matricielles subordonnées, on a

$$\|\mathbb{A}\|_2 = \sup_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \\ \|\mathbf{x}\|_2 = 1}} \|\mathbb{A}\mathbf{x}\|_2.$$

En utilisant les résultats de **Q.3**, 2. et 3., on obtient

$$\|\mathbb{A}\|_2 = \sqrt{\rho(\mathbb{A}^* \mathbb{A})}.$$

Q. 4 a. Montrer que la norme $\|\bullet\|_2$ est invariante par transformation unitaire :

$$\mathbb{U}\mathbb{U}^* = \mathbb{I} \implies \|\mathbb{A}\|_2 = \|\mathbb{U}\mathbb{A}\|_2 = \|\mathbb{A}\mathbb{U}\|_2 = \|\mathbb{U}^* \mathbb{A} \mathbb{U}\|_2.$$

b. Montrer que si $\mathbb{A}$ est hermitienne alors

$$\|\mathbb{A}\|_2 = \rho(\mathbb{A}).$$

□

R. 4 a. Soit $\mathbb{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ unitaire, i.e.

$$\mathbb{U}\mathbb{U}^* = \mathbb{U}^* \mathbb{U} = \mathbb{I}.$$

- Montrons que $\|\mathbb{A}\|_2 = \|\mathbb{U}\mathbb{A}\|_2$.
On a $\|\mathbb{A}\|_2 = \sqrt{\rho(\mathbb{A}^* \mathbb{A})}$ et donc

$$\|\mathbb{U}\mathbb{A}\|_2 = \sqrt{\rho((\mathbb{U}\mathbb{A})^* \mathbb{U}\mathbb{A})} = \sqrt{\rho(\mathbb{A}^* (\mathbb{U}^* \mathbb{U}) \mathbb{A})} = \sqrt{\rho(\mathbb{A}^* \mathbb{A})} = \|\mathbb{A}\|_2.$$

- Montrons que $\|\mathbb{A}\|_2 = \|\mathbb{A}\mathbb{U}\|_2$.

On a

$$\|\mathbb{A}\mathbb{U}\|_2 \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \\ \mathbf{x} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbb{U}\mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2}.$$

En posant $\mathbf{y} = \mathbb{U}\mathbf{x}$, on a $\mathbf{x} = \mathbb{U}^*\mathbf{y}$ car $\mathbb{U}^{-1} = \mathbb{U}^*$ ($\mathbb{U}$ étant unitaire). Comme $\mathbb{U}$ est inversible on a

$$\{\mathbb{U}^*\mathbf{y}, \forall \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}\} = \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$$

$$\sup_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \\ \mathbf{x} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbb{U}\mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} = \sup_{\substack{\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n \\ \mathbf{y} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{y}\|_2}{\|\mathbb{U}^*\mathbf{y}\|_2}.$$

De plus, on a

$$\|\mathbb{U}^*\mathbf{y}\|_2^2 = \langle \mathbb{U}^*\mathbf{y}, \mathbb{U}^*\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbb{U}\mathbb{U}^*\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{y}\|_2^2$$

et donc $\|\mathbb{A}\mathbb{U}\|_2 = \|\mathbb{A}\|_2$.

- Montrons que $\|\mathbb{A}\|_2 = \|\mathbb{U}^*\mathbb{A}\mathbb{U}\|_2$.

Ceci découle des deux égalités précédentes. En effet,

$$\begin{aligned} \|\mathbb{U}^*\mathbb{A}\mathbb{U}\|_2 &= \|\mathbb{U}^*(\mathbb{A}\mathbb{U})\|_2 = \|\mathbb{A}\mathbb{U}\|_2 && \text{car } \mathbb{U}^* \text{ unitaire} \\ &= \|\mathbb{A}\|_2 && \text{car } \mathbb{U} \text{ unitaire} \end{aligned}$$