

Exercices associés au cours d'Analyse Numérique I

Résolution de systèmes linéaires

Méthodes itératives

1 Exercices du cours

EXERCICE 1

Soit A une matrice inversible décomposée sous la forme $A = M - N$ avec M inversible. On pose

$$B = M^{-1}N \text{ et } c = M^{-1}b.$$

Montrer que la suite définie par

$$x^{[0]} \in \mathbb{K}^n \text{ et } x^{[k+1]} = Bx^{[k]} + c$$

converge vers $\bar{x} = A^{-1}b$ quelque soit $x^{[0]}$ si et seulement si $\rho(B) < 1$.

Correction On rappelle tout d'abord le Théorème ??, page ??:

Théorème. Soit B une matrice carrée. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- a. $\lim_{k \rightarrow \infty} B^k = 0$,
- b. $\lim_{k \rightarrow \infty} B^k v = 0$ pour tout vecteur v ,
- c. $\rho(B) < 1$,
- d. $\|B\| < 1$ pour au moins une norme matricielle subordonnée $\|\bullet\|$.

Comme $\bar{x} = A^{-1}b$ (sans présupposer de la convergence) on a

$$A\bar{x} = b \iff M\bar{x} = N\bar{x} + b$$

et, comme M est inversible

$$\bar{x} = M^{-1}N\bar{x} + M^{-1}b = B\bar{x} + c$$

On obtient donc

$$\bar{x} - x^{[k+1]} = B(\bar{x} - x^{[k]})$$

Or la suite $x^{[k]}$ converge vers $\bar{x}$ si et seulement si la suite $e^{[k]} \stackrel{\text{def}}{=} \bar{x} - x^{[k]}$ converge vers 0 . On a

$$\forall k \in \mathbb{N}, e^{[k]} = B^k e^{[0]}.$$

D'après le théorème cité, on a $\lim_{k \rightarrow +\infty} B^k e^{[0]} = 0$, $\forall e^{[0]} \in \mathbb{K}^n$ si et seulement si $\rho(B) < 1$. ◇

EXERCICE 2

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne inversible décomposée en $A = M - N$ où M est inversible. On note $B = I - M^{-1}A$.

Q. 1

Montrer que la matrice $M^* + N$ est hermitienne.

R. 1

On a

$$\begin{aligned}
(\mathbb{M}^* + \mathbb{N})^* &= \mathbb{M} + \mathbb{N}^* \\
&= \mathbb{A} + \mathbb{N} + \mathbb{N}^* = \mathbb{A}^* + \mathbb{N} + \mathbb{N}^* \quad \text{car } \mathbb{A} \text{ est hermitienne} \\
&= \mathbb{M}^* + \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

La matrice $\mathbb{M}^* + \mathbb{N}$ est donc hermitienne.On suppose maintenant que $\mathbb{M}^* + \mathbb{N}$ est définie positive.**Q. 2**Soit $\mathbf{x}$ un vecteur quelconque de $\mathbb{C}^n$ et $\mathbf{y} = \mathbb{B}\mathbf{x}$.

a. Montrer que

$$\langle \mathbf{x}, \mathbb{A}\mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{y}, \mathbb{A}\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbb{A}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x} \rangle + \langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbb{A}\mathbf{x} \rangle - \langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbb{A}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x} \rangle \quad (2.1)$$

et

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x}. \quad (2.2)$$

b. En déduire que

$$\langle \mathbf{x}, \mathbb{A}\mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{y}, \mathbb{A}\mathbf{y} \rangle = \langle (\mathbf{x} - \mathbf{y}), (\mathbb{M}^* + \mathbb{N})(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \rangle. \quad (2.3)$$

R. 2a. On a $\mathbf{y} = \mathbb{B}\mathbf{x}$ avec $\mathbb{B} = \mathbb{I} - \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}$ ce qui donne

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbb{B}\mathbf{x} = (\mathbb{I} - \mathbb{B})\mathbf{x} = \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x}.$$

L'équation (2.2) est donc démontrée. Pour prouver (2.1), on note que

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{y}, \mathbb{A}\mathbf{y} \rangle &= \langle \mathbf{x} - \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbb{A}(\mathbf{x} - \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x}) \rangle \\
&= \langle \mathbf{x}, \mathbb{A}\mathbf{x} \rangle - \langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbb{A}\mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbb{A}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x} \rangle + \langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbb{A}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x} \rangle.
\end{aligned}$$

On en déduit immédiatement (2.1).

b. En utilisant (2.2), on obtient

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, (\mathbb{M}^* + \mathbb{N})(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \rangle &= \langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x}, (\mathbb{M}^* + \mathbb{N})\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x} \rangle \\
&= \langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x}, (\mathbb{M} + \mathbb{N}^*)\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x} \rangle \quad \text{car } \mathbb{M}^* + \mathbb{N} \text{ hermitienne} \\
&= \langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x}, (\mathbb{M} + \mathbb{M}^* - \mathbb{A}^*)\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x} \rangle \quad \text{car } \mathbb{N} = \mathbb{M} - \mathbb{A} \\
&= \langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbb{A}\mathbf{x} \rangle + \langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbb{M}^*\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x} \rangle - \langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbb{A}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x} \rangle \quad \text{car } \mathbb{A} \text{ hermitienne}
\end{aligned}$$

Or, par propriété du produit scalaire, on a

$$\langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbb{M}^*\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x} \rangle = \langle \mathbb{M}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x} \rangle = \langle \mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbb{A}^*\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x} \rangle.$$

Comme $\mathbb{A}$ est hermitienne, on obtient

$$\langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbb{M}^*\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbb{A}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x} \rangle.$$

On abouti alors à

$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, (\mathbb{M}^* + \mathbb{N})(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \rangle = \langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbb{A}\mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbb{A}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x} \rangle - \langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbb{A}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x} \rangle.$$

L'équation (2.3) est obtenue en utilisant (2.1).

Q. 3Montrer que si $\mathbb{A}$ est définie positive alors $\rho(\mathbb{B}) < 1$.**R. 3**

On veut démontrer que sous les hypothèses $\mathbb{A}$ hermitienne définie positive et $\mathbb{M}^* + \mathbb{N}$ (hermitienne) définie positive on a $\rho(\mathbb{B}) < 1$, c'est à dire que pour tout élément propre $(\lambda, \mathbf{u})$ de $\mathbb{B}$ alors $|\lambda| < 1$.

Soit $(\lambda, \mathbf{u}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ un élément propre de $\mathbb{B}$. On a $\mathbb{B}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$. En prenant $\mathbf{x} = \mathbf{u}$ dans Q.2, on a $\mathbf{y} = \mathbb{B}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$ et donc

$\mathbf{x} - \mathbf{y} = (1 - \lambda)\mathbf{u}$. De (2.3) on obtient

$$\langle \mathbf{u}, \mathbb{A}\mathbf{u} \rangle - \langle \lambda\mathbf{u}, \lambda\mathbb{A}\mathbf{u} \rangle = \langle (1 - \lambda)\mathbf{u}, (\mathbb{M}^* + \mathbb{N})((1 - \lambda)\mathbf{u}) \rangle$$

c'est à dire

$$(1 - |\lambda|^2) \langle \mathbf{u}, \mathbb{A}\mathbf{u} \rangle = |1 - \lambda|^2 \langle \mathbf{u}, (\mathbb{M}^* + \mathbb{N})\mathbf{u} \rangle. \quad (\text{R2.1})$$

On va montrer que $|1 - \lambda| > 0$, c'est à dire $\lambda \neq 1$. Pour cela on effectue une démonstration par l'absurde.

Par l'absurde on suppose $\lambda = 1$. Dans ce cas, comme $\mathbb{B}\mathbf{u} = \mathbf{u}$, on a $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. De (2.2), on déduit alors $\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ et comme $\mathbb{A}$ et $\mathbb{M}^{-1}$ sont inversibles $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Or $\mathbf{x} = \mathbf{u}$ est un vecteur propre de $\mathbb{B}$, il ne peut donc être nul! On a une contradiction et donc, l'hypothèse de départ est fausse: on a démontré que $\lambda \neq 1$.

Comme par hypothèse, la matrice $\mathbb{M}^* + \mathbb{N}$ (hermitienne) est définie positive et $\mathbf{u} \neq 0$, on obtient

$$|1 - \lambda|^2 \langle \mathbf{u}, (\mathbb{M}^* + \mathbb{N})\mathbf{u} \rangle > 0.$$

On déduit alors de (R2.1) que

$$(1 - |\lambda|^2) \langle \mathbf{u}, \mathbb{A}\mathbf{u} \rangle > 0.$$

Comme $\mathbb{A}$ est hermitienne définie positive et $\mathbf{u} \neq 0$, on a

$$\langle \mathbf{u}, \mathbb{A}\mathbf{u} \rangle > 0$$

et donc $1 - |\lambda|^2 > 0$, c'est à dire $|\lambda| < 1$.

On suppose $\rho(\mathbb{B}) < 1$ et on va démontrer, par l'absurde, que $\mathbb{A}$ est définie positive.

Q. 4

On suppose qu'il existe $\mathbf{x}^{[0]} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tel que $\alpha_0 \stackrel{\text{def}}{=} \langle \mathbf{x}^{[0]}, \mathbb{A}\mathbf{x}^{[0]} \rangle \in \mathbb{C} \setminus]0, +\infty[$. On définit alors les suites

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbf{x}^{[k]} = \mathbb{B}\mathbf{x}^{[k-1]} \quad \text{et} \quad \alpha_k = \langle \mathbf{x}^{[k]}, \mathbb{A}\mathbf{x}^{[k]} \rangle.$$

a. Montrer que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{x}^{[k]} = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \alpha_k = 0.$$

b. Montrer que $\alpha_0 \in]-\infty, 0]$.

c. Démontrer par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ que

$$(\mathcal{P}_k) : \mathbf{x}^{[k]} \neq \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}^{[k]} - \mathbf{x}^{[k-1]} \neq \mathbf{0}, \quad \text{et} \quad 0 \geq \alpha_{k-1} > \alpha_k.$$

d. Conclure.

R. 4

a. On a alors

$$\mathbf{x}^{[k]} = \mathbb{B}^k \mathbf{x}^{[0]}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

D'après le Théorème ??, page ??,

$$\rho(\mathbb{B}) < 1 \iff \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{B}^k \mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n.$$

On a donc

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{x}^{[k]} = \mathbf{0}.$$

Comme l'application $\mathbf{x} \mapsto \langle \mathbf{x}, \mathbb{A}\mathbf{x} \rangle$ est continue, on en déduit

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \alpha_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} \langle \mathbf{x}^{[k]}, \mathbb{A}\mathbf{x}^{[k]} \rangle = 0.$$

b. Pour une matrice quelconque $\langle \mathbf{x}, \mathbb{A}\mathbf{x} \rangle \in \mathbb{C}$, or $\mathbb{A}$ étant hermitienne, on a $\langle \mathbf{x}, \mathbb{A}\mathbf{x} \rangle \in \mathbb{R}$. En effet, par propriété du produit scalaire on a

$$\langle \mathbf{x}, \mathbb{A}\mathbf{x} \rangle = \langle \mathbb{A}^* \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbb{A}\mathbf{x} \rangle}.$$

Comme par hypothèse $\alpha_0 \in \mathbb{C} \setminus]0, +\infty[$, on en déduit $\alpha_0 \in]-\infty, 0]$.

c. Tout d'abord de l'égalité (2.3) avec $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{[k-1]}$ et $\mathbf{y} = \mathbb{B}\mathbf{x} = \mathbf{x}^{[k]}$ on obtient

$$\langle \mathbf{x}^{[k-1]}, \mathbb{A}\mathbf{x}^{[k-1]} \rangle - \langle \mathbf{x}^{[k]}, \mathbb{A}\mathbf{x}^{[k]} \rangle = \langle (\mathbf{x}^{[k-1]} - \mathbf{x}^{[k]}), (\mathbb{M}^* + \mathbb{N})(\mathbf{x}^{[k-1]} - \mathbf{x}^{[k]}) \rangle$$

- **Initialisation** : montrons que $(\mathcal{P}_0)$ est vérifiée.

On a $\mathbf{x}^{[0]} \neq 0$ et $\mathbf{x}^{[1]} = \mathbb{B}\mathbf{x}^{[0]}$.

On montre par l'absurde que $\mathbf{x}^{[1]} \neq 0$. Supposons $\mathbf{x}^{[1]} = 0$, alors $\alpha_1 = 0$ et $\mathbf{x}^{[0]} - \mathbf{x}^{[1]} = \mathbf{x}^{[0]} \neq 0$. Comme $\mathbb{M}^* + \mathbb{N}$ est hermitienne définie positive on obtient

$$\alpha_0 - \alpha_1 = \left\langle (\mathbf{x}^{[0]} - \mathbf{x}^{[1]}), (\mathbb{M}^* + \mathbb{N})(\mathbf{x}^{[0]} - \mathbf{x}^{[1]}) \right\rangle > 0$$

et contradiction avec $\alpha_0 \leq 0$.

On montre ensuite par l'absurde que $\mathbf{x}^{[0]} \neq \mathbf{x}^{[1]}$. Supposons $\mathbf{x}^{[1]} = \mathbf{x}^{[0]}$. Par construction $\mathbf{x}^{[1]} = \mathbb{B}\mathbf{x}^{[0]}$, et dans ce cas, comme $\mathbf{x}^{[0]} \neq 0$, $(1, \mathbf{x}^{[0]})$ serait un élément propre de $\mathbb{B}$: contradiction avec $\rho(\mathbb{B}) < 1$.

Comme $\mathbf{x}^{[0]} - \mathbf{x}^{[1]} \neq 0$, on a

$$\alpha_0 - \alpha_1 = \left\langle (\mathbf{x}^{[0]} - \mathbf{x}^{[1]}), (\mathbb{M}^* + \mathbb{N})(\mathbf{x}^{[0]} - \mathbf{x}^{[1]}) \right\rangle > 0$$

et donc $0 \geq \alpha_0 > \alpha_1$.

- **Hérédité** : soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose $(\mathcal{P}_k)$ vérifiée. On a alors $\mathbf{x}^{[k]} \neq 0$, $\mathbf{x}^{[k+1]} = \mathbb{B}\mathbf{x}^{[k]}$ et $\alpha_k \leq 0$.

On montre par l'absurde que $\mathbf{x}^{[k+1]} \neq 0$. Supposons $\mathbf{x}^{[k+1]} = 0$, alors $\alpha_{k+1} = 0$ et $\mathbf{x}^{[k]} - \mathbf{x}^{[k+1]} = \mathbf{x}^{[k]} \neq 0$.

Comme $\mathbb{M}^* + \mathbb{N}$ est hermitienne définie positive on obtient

$$\alpha_k - \alpha_{k+1} = \left\langle (\mathbf{x}^{[k]} - \mathbf{x}^{[k+1]}), (\mathbb{M}^* + \mathbb{N})(\mathbf{x}^{[k]} - \mathbf{x}^{[k+1]}) \right\rangle > 0$$

et contradiction avec $\alpha_k \leq 0$.

On montre ensuite par l'absurde que $\mathbf{x}^{[k]} \neq \mathbf{x}^{[k+1]}$. Supposons $\mathbf{x}^{[k+1]} = \mathbf{x}^{[k]}$. Par construction $\mathbf{x}^{[k+1]} = \mathbb{B}\mathbf{x}^{[k]}$, et dans ce cas, comme $\mathbf{x}^{[k]} \neq 0$, $(1, \mathbf{x}^{[k]})$ serait un élément propre de $\mathbb{B}$: contradiction avec $\rho(\mathbb{B}) < 1$.

Comme $\mathbf{x}^{[k]} - \mathbf{x}^{[k+1]} \neq 0$, on a

$$\alpha_k - \alpha_{k+1} = \left\langle (\mathbf{x}^{[k]} - \mathbf{x}^{[k+1]}), (\mathbb{M}^* + \mathbb{N})(\mathbf{x}^{[k]} - \mathbf{x}^{[k+1]}) \right\rangle > 0$$

et donc $0 \geq \alpha_k > \alpha_{k+1}$.

- **Conclusion** : la proposition est vérifiée pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

d. La suite $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est donc strictement décroissante de premier terme $\alpha_0 \leq 0$: elle ne peut converger vers 0. On a donc une contradiction avec l'hypothèse initiale, $\mathbb{A}$ hermitienne non définie positive

EXERCICE 3

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible dont les éléments diagonaux sont non nuls. On note $\mathbb{A}_{i,j}$ la composante (i, j) de la matrice $\mathbb{A}$. On décompose la matrice $\mathbb{A}$ sous la forme $\mathbb{A} = \mathbb{D} - \mathbb{E} - \mathbb{F}$, où $\mathbb{D}$ représente la diagonale de $\mathbb{A}$, $-\mathbb{E}$ la partie triangulaire inférieure stricte et $-\mathbb{F}$ la partie triangulaire supérieure stricte.

La méthode S.O.R. (successive over relaxation) est donnée par

$$x_i^{[k+1]} = \frac{w}{\mathbb{A}_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} \mathbb{A}_{ij} x_j^{[k+1]} - \sum_{j=i+1}^n \mathbb{A}_{ij} x_j^{[k]} \right) + (1-w)x_i^{[k]}, \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$$

Q. 1

Déterminer la matrice d'itération $\mathbb{B}$ et le vecteur $\mathbf{c}$ tels que

$$\mathbf{x}^{[k+1]} = \mathbb{B}\mathbf{x}^{[k]} + \mathbf{c}$$

en fonction de $\mathbb{D}$, $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$, et $\mathbf{b}$.

R. 1

Pour la méthode S.O.R. on a , $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$x_i^{[k+1]} = \frac{w}{\mathbb{A}_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} \mathbb{A}_{ij} x_j^{[k+1]} - \sum_{j=i+1}^n \mathbb{A}_{ij} x_j^{[k]} \right) + (1-w)x_i^{[k]}$$

ce qui s'écrit aussi

$$\frac{\mathbb{A}_{ii}}{w} x_i^{[k+1]} + \sum_{j=1}^{i-1} \mathbb{A}_{ij} x_j^{[k+1]} = b_i - \sum_{j=i+1}^n \mathbb{A}_{ij} x_j^{[k]} + \frac{1-w}{w} \mathbb{A}_{ii} x_i^{[k]}$$

et matriciellement on obtient

$$\left(\frac{\mathbb{D}}{w} - \mathbb{E}\right) \mathbf{x}^{[k+1]} = \left(\frac{1-w}{w} \mathbb{D} + \mathbb{F}\right) \mathbf{x}^{[k]} + \mathbf{b}.$$

Comme la matrice $\left(\frac{\mathbb{D}}{w} - \mathbb{E}\right)$ est inversible (car triangulaire inférieure à éléments diagonaux non nuls), on a

$$\mathbf{x}^{[k+1]} = \left(\frac{\mathbb{D}}{w} - \mathbb{E}\right)^{-1} \left(\frac{1-w}{w} \mathbb{D} + \mathbb{F}\right) \mathbf{x}^{[k]} + \left(\frac{\mathbb{D}}{w} - \mathbb{E}\right)^{-1} \mathbf{b}$$

La matrice d'itération de S.O.R. est $\mathbb{B} = \left(\frac{\mathbb{D}}{w} - \mathbb{E}\right)^{-1} \left(\frac{1-w}{w} \mathbb{D} + \mathbb{F}\right)$ et le vecteur $\mathbf{c} = \left(\frac{\mathbb{D}}{w} - \mathbb{E}\right)^{-1} \mathbf{b}$.

EXERCICE 4

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible dont les éléments diagonaux sont non nuls. On note $\mathbb{A}_{i,j}$ la composante (i, j) de la matrice $\mathbb{A}$. On décompose la matrice $\mathbb{A}$ sous la forme $\mathbb{A} = \mathbb{D} - \mathbb{E} - \mathbb{F}$, où $\mathbb{D}$ représente la diagonale de $\mathbb{A}$, $-\mathbb{E}$ la partie triangulaire inférieure stricte et $-\mathbb{F}$ la partie triangulaire supérieure stricte.

La matrice d'itération de la méthode S.O.R., notée $\mathcal{L}_w$, est donnée par

$$\mathcal{L}_w = \left(\frac{\mathbb{D}}{w} - \mathbb{E}\right)^{-1} \left(\frac{1-w}{w} \mathbb{D} + \mathbb{F}\right). \quad (4.1)$$

On pose $\mathbb{L} = \mathbb{D}^{-1}\mathbb{E}$ et $\mathbb{U} = \mathbb{D}^{-1}\mathbb{F}$.

Q. 1

Montrer que

$$\mathcal{L}_w = (\mathbb{I} - w\mathbb{L})^{-1} ((1-w)\mathbb{I} + w\mathbb{U}).$$

R. 1

Comme $\mathbb{E} = \mathbb{D}\mathbb{L}$ et $\mathbb{F} = \mathbb{D}\mathbb{U}$ on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_w &= \left(\frac{\mathbb{D}}{w} - \mathbb{D}\mathbb{L}\right)^{-1} \left(\frac{1-w}{w} \mathbb{D} + \mathbb{D}\mathbb{U}\right) \\ &= \left(\frac{1}{w} \mathbb{D}[\mathbb{I} - w\mathbb{L}]\right)^{-1} \left(\frac{1}{w} \mathbb{D}[(1-w)\mathbb{I} + w\mathbb{U}]\right) \\ &= (\mathbb{I} - w\mathbb{L})^{-1} \left(\frac{1}{w} \mathbb{D}\right)^{-1} \left(\frac{1}{w} \mathbb{D}\right) ((1-w)\mathbb{I} + w\mathbb{U}) \\ &= (\mathbb{I} - w\mathbb{L})^{-1} ((1-w)\mathbb{I} + w\mathbb{U}). \end{aligned}$$

Q. 2

En déduire que

$$\rho(\mathcal{L}_w) \geq |w - 1|. \quad (4.2)$$

R. 2

La matrice $\mathbb{L}$ est triangulaire inférieure à diagonale nulle car elle est le produit d'une matrice diagonale (et donc triangulaire inférieure) $\mathbb{D}^{-1}$ et d'une matrice triangulaire inférieure $\mathbb{E}$ à diagonale nulle. De même la matrice $\mathbb{U}$ est triangulaire supérieure à diagonale nulle.

On sait que le déterminant d'une matrice est égale aux produits de ses valeurs propres comptées avec leurs multiplicités. En notant n la dimension de la matrice $\mathcal{L}_w$, et en notant $\lambda_i(\mathcal{L}_w)$ ses n valeurs propres, on a donc

$$\det(\mathcal{L}_w) = \prod_{i=1}^n \lambda_i(\mathcal{L}_w).$$

Le rayon spectral de $\mathcal{L}_w$, noté $\rho(\mathcal{L}_w)$, correspond au plus grand des modules des valeurs propres. On a alors

$$\rho(\mathcal{L}_w) = \max_{i \in [1, n]} |\lambda_i(\mathcal{L}_w)| \geq |\det(\mathcal{L}_w)|^{1/n}$$

De plus on a

$$\det(\mathcal{L}_w) = \det\left((\mathbb{I} - w\mathbb{L})^{-1} ((1-w)\mathbb{I} + w\mathbb{U})\right) = \det\left((\mathbb{I} - w\mathbb{L})^{-1}\right) \det((1-w)\mathbb{I} + w\mathbb{U})$$

La matrice $\mathbb{I} - w\mathbb{L}$ est triangulaire inférieure à diagonale unité donc son inverse aussi. On en déduit $\det((\mathbb{I} - w\mathbb{L})^{-1}) = 1$.

La matrice $(1-w)\mathbb{I} + w\mathbb{U}$ est triangulaire supérieure avec tous ses éléments diagonaux valant $1-w$ et donc

$\det(((1-w)\mathbb{I} + w\mathbb{U})) = (1-w)^n$. On a alors $|\det(\mathcal{L}_w)| = |1-w|^n$ et

$$\rho(\mathcal{L}_w) \geq |\det(\mathcal{L}_w)|^{1/n} = |1-w|.$$

EXERCICE 5

On note $\mathbb{T} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice tridiagonale

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 \\ b_2 & a_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & b_n & a_n \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

Q. 1

Soit $\mu \in \mathbb{C}^*$. On note $\mathbb{Q}(\mu) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice diagonale de diagonale $(\mu, \mu^2, \dots, \mu^n)$.

- Expliciter la matrice $\mathbb{T}(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{Q}(\mu)\mathbb{T}\mathbb{Q}^{-1}(\mu)$ en fonction des coefficients tridiagonaux de la matrice $\mathbb{T}$ et de μ .
- Déterminer $\det(\mathbb{T}(\mu))$ en fonction de $\det(\mathbb{T})$.

R. 1

- On peut noter que la matrice $\mathbb{Q}(\mu)$ est inversible car elle est diagonale et $\mu \in \mathbb{C}^*$. Son inverse est la matrice diagonale de diagonale $(\mu^{-1}, \mu^{-2}, \dots, \mu^{-n})$.

1ère démonstration. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{T}(\mu) &= \begin{pmatrix} \mu & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mu^n \end{pmatrix} \mathbb{T} \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu^2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\mu^n} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mu a_1 & \mu c_1 & 0 & \dots & 0 \\ \mu^2 b_2 & \mu^2 a_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \mu^{n-1} c_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & \mu^n b_n & \mu^n a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu^2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\mu^n} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 & \mu^{-1} c_1 & 0 & \dots & 0 \\ \mu b_2 & a_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \mu^{-1} c_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & \mu b_n & a_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2ème démonstration. Pour simplifier l'écriture, on pose $\mathbb{Q} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{Q}(\mu)$. Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on a

$$(\mathbb{T}(\mu))_{i,j} = (\mathbb{Q}\mathbb{T}\mathbb{Q}^{-1})_{i,j} = \sum_{k=1}^n (\mathbb{Q}\mathbb{T})_{i,k} (\mathbb{Q}^{-1})_{k,j}$$

Or $\mathbb{Q}^{-1}$ est diagonale, donc $(\mathbb{Q}^{-1})_{k,j} = 0$, si $k \neq j$. Ceci donne

$$\begin{aligned} (\mathbb{T}(\mu))_{i,j} &= (\mathbb{Q}\mathbb{T})_{i,j} (\mathbb{Q}^{-1})_{j,j} = \mu^{-j} (\mathbb{Q}\mathbb{T})_{i,j} \\ &= \mu^{-j} \sum_{k=1}^n \mathbb{Q}_{i,k} \mathbb{T}_{k,j}. \end{aligned}$$

De même, $\mathbb{Q}$ est diagonale, donc $\mathbb{Q}_{i,k} = 0$, si $k \neq i$. Ceci donne

$$(\mathbb{T}(\mu))_{i,j} = \mu^{-j} \mathbb{Q}_{i,i} \mathbb{T}_{i,j} = \mu^{i-j} \mathbb{T}_{i,j}.$$

La matrice $\mathbb{T}$ étant tridiagonale, $\mathbb{T}(\mu)$ l'est aussi et on a

$$\begin{aligned} (\mathbb{T}(\mu))_{i,i} &= \mathbb{T}_{i,i} = a_i, & \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket & \quad \text{(diagonale)} \\ (\mathbb{T}(\mu))_{i,i+1} &= \mu^{-1} \mathbb{T}_{i,i+1} = \mu^{-1} c_i, & \forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket & \quad \text{(sur-diagonale)} \\ (\mathbb{T}(\mu))_{i-1,i} &= \mu \mathbb{T}_{i-1,i} = \mu^{-1} b_i, & \forall i \in \llbracket 2, n \rrbracket & \quad \text{(sous-diagonale)} \end{aligned}$$

b. On a

$$\det(\mathbb{T}(\mu)) = \det(\mathbb{Q}(\mu) \mathbb{T} \mathbb{Q}^{-1}(\mu)) = \det(\mathbb{Q}(\mu)) \det(\mathbb{T}) \det(\mathbb{Q}^{-1}(\mu)) = \det(\mathbb{T}),$$

$$\text{car } \det(\mathbb{Q}(\mu)) \det(\mathbb{Q}^{-1}(\mu)) = 1.$$

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible dont les éléments diagonaux sont non nuls. On note $\mathbb{A}_{i,j}$ la composante (i, j) de la matrice $\mathbb{A}$. On décompose la matrice $\mathbb{A}$ sous la forme $\mathbb{A} = \mathbb{D} - \mathbb{E} - \mathbb{F}$, où $\mathbb{D}$ représente la diagonale de $\mathbb{A}$, $-\mathbb{E}$ la partie triangulaire inférieure stricte et $-\mathbb{F}$ la partie triangulaire supérieure stricte.

On note respectivement $\mathbb{J} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{D}^{-1}(\mathbb{E} + \mathbb{F})$ et $\mathcal{L}_1 \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1} \mathbb{F}$ les matrices d'itérations des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel.

Soit $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. On souhaite résoudre le système $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}$ par la méthode de Gauss-Seidel ou par la méthode de Jacobi.

On suppose dans la suite que la matrice inversible $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit sous la forme

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \nu_1 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_2 & \alpha_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \nu_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & \beta_n & \alpha_n \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

et que ses éléments diagonaux sont non nuls.

Q. 2

a. Montrer que les valeurs propres de $\mathbb{J}$ sont les racines du polynôme

$$q_{\mathbb{J}}(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \det(\lambda \mathbb{D} - \mathbb{E} - \mathbb{F}).$$

b. En utilisant la question 1, montrer que $q_{\mathbb{J}}(\lambda) = \det(\lambda \mathbb{D} - \lambda \mathbb{E} - \frac{1}{\lambda} \mathbb{F})$.

c. En déduire que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de $\mathbb{J}$ alors $-\lambda$ l'est aussi.

R. 2

a. Les valeurs propres de $\mathbb{J}$ sont les racines de son polynôme caractéristique

$$P_{\mathbb{J}}(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \det(\lambda \mathbb{I} - \mathbb{J}).$$

Or on a

$$\begin{aligned} P_{\mathbb{J}}(\lambda) &= \det(\lambda \mathbb{I} - \mathbb{D}^{-1}(\mathbb{E} + \mathbb{F})) \\ &= \det(\mathbb{D}^{-1}(\lambda \mathbb{D} - (\mathbb{E} + \mathbb{F}))) \\ &= \det(\mathbb{D}^{-1}) \det(\lambda \mathbb{D} - (\mathbb{E} + \mathbb{F})) \\ &= \det(\mathbb{D}^{-1}) q_{\mathbb{J}}(\lambda). \end{aligned}$$

Comme $\det(\mathbb{D}^{-1}) \neq 0$, les valeurs propres de $\mathbb{J}$ sont aussi les racines de $q_{\mathbb{J}}(\lambda)$.

b. En reprenant les notations de la question 1, et en notant $\mathbb{T}$ la matrice

$$\mathbb{T} = \lambda \mathbb{D} - \mathbb{E} - \mathbb{F} = \begin{pmatrix} \lambda \alpha_1 & \nu_1 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_2 & \lambda \alpha_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \nu_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & \beta_n & \lambda \alpha_n \end{pmatrix}$$

la matrice $\mathbb{T}(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{Q}(\lambda)\mathbb{T}\mathbb{Q}^{-1}(\lambda)$ correspond alors à

$$\mathbb{T}(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda\alpha_1 & \frac{1}{\lambda}\nu_1 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda\beta_2 & \lambda\alpha_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{1}{\lambda}\nu_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & \lambda\beta_n & \lambda\alpha_n \end{pmatrix} = \lambda\mathbb{D} - \lambda\mathbb{E} - \frac{1}{\lambda}\mathbb{F}.$$

D'après la question 1, on a $\det(\mathbb{T}(\lambda)) = \det(\mathbb{T})$ ce qui donne

$$\det\left(\lambda\mathbb{D} - \lambda\mathbb{E} - \frac{1}{\lambda}\mathbb{F}\right) = \det\left(\lambda\mathbb{D} - \mathbb{E} - \mathbb{F}\right) = q_{\mathbb{J}}(\lambda).$$

c. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de $\mathbb{J}$. On a donc $P_{\mathbb{J}}(\lambda) = 0$. Or on a

$$P_{\mathbb{J}}(\lambda) = \det(\mathbb{D}^{-1})q_{\mathbb{J}}(\lambda) = \det(\mathbb{D}^{-1})\det\left(\lambda\mathbb{D} - \lambda\mathbb{E} - \frac{1}{\lambda}\mathbb{F}\right)$$

et donc

$$\begin{aligned} P_{\mathbb{J}}(-\lambda) &= \det(\mathbb{D}^{-1})\det\left(-\lambda\mathbb{D} + \lambda\mathbb{E} + \frac{1}{\lambda}\mathbb{F}\right) \\ &= (-1)^n \det(\mathbb{D}^{-1})\det\left(\lambda\mathbb{D} - \lambda\mathbb{E} - \frac{1}{\lambda}\mathbb{F}\right) \\ &= (-1)^n P_{\mathbb{J}}(\lambda) \\ &= 0 \end{aligned}$$

c'est à dire $-\lambda$ est aussi une valeur propre de $\mathbb{J}$.

Q. 3

a. Montrer que les valeurs propres de $\mathcal{L}_1$ sont les racines du polynôme

$$q_{\mathcal{L}_1}(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \det(\lambda\mathbb{D} - \lambda\mathbb{E} - \mathbb{F}).$$

b. En déduire que

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}^*, \quad q_{\mathcal{L}_1}(\lambda^2) = \lambda^n q_{\mathbb{J}}(\lambda). \quad (5.3)$$

R. 3

a. Les valeurs propres de $\mathcal{L}_1$ sont les racines de son polynôme caractéristique

$$P_{\mathcal{L}_1}(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \det(\lambda\mathbb{I} - \mathcal{L}_1).$$

Or on a

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{L}_1}(\lambda) &= \det\left(\lambda\mathbb{I} - (\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1}\mathbb{F}\right) \\ &= \det\left((\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1}(\lambda(\mathbb{D} - \mathbb{E}) - \mathbb{F})\right) \\ &= \det((\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1})\det\left(\lambda(\mathbb{D} - \mathbb{E}) - \mathbb{F}\right) \\ &= \det((\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1})q_{\mathcal{L}_1}(\lambda). \end{aligned}$$

Comme $\det((\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1}) = \det(\mathbb{D}^{-1}) \neq 0$, les valeurs propres de $\mathcal{L}_1$ sont aussi les racines de $q_{\mathcal{L}_1}(\lambda)$.

b. Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. On a

$$\begin{aligned} q_{\mathcal{L}_1}(\lambda^2) &= \det\left(\lambda^2(\mathbb{D} - \mathbb{E}) - \mathbb{F}\right) \\ &= \det\left(\lambda(\lambda\mathbb{D} - \lambda\mathbb{E} - \frac{1}{\lambda}\mathbb{F})\right) \\ &= \lambda^n \det\left(\lambda\mathbb{D} - \lambda\mathbb{E} - \frac{1}{\lambda}\mathbb{F}\right). \end{aligned}$$

Et donc on obtient bien (5.3).

Q. 4

- a. Comparer les valeurs propres de $\mathbb{J}$ à celles de $\mathcal{L}_1$.
- b. Une des deux méthodes est-elle à privilégier dans ce cas?

R. 4

- a. Si λ est une valeur propre de $\mathbb{J}$ alors λ^2 est une valeur propre de $\mathcal{L}_1$. Si $\mu \neq 0$ est une valeur propre de $\mathcal{L}_1$ alors ses racines carrées complexes $\sqrt{\mu}$ et $-\sqrt{\mu}$ sont valeurs propres de $\mathbb{J}$.
- b. On a $\rho(\mathcal{L}_1) = \rho(\mathbb{J})^2$, et donc $\rho(\mathcal{L}_1) < 1 \Leftrightarrow \rho(\mathbb{J}) < 1$. Les deux méthodes convergent donc simultanément. Toutefois, lorsqu'il y a convergence, on a

$$\rho(\mathcal{L}_1) = \rho(\mathbb{J})^2 < \rho(\mathbb{J}) < 1$$

et donc, Il faut privilégier la méthode de Gauss-Seidel car une méthode itérative converge d'autant plus vite que le rayon spectral de sa matrice d'itération est petit.

2 Exercice supplémentaire

EXERCICE 6

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne définie positive et $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$.

Q. 1

Montrer les résultats suivant:

- a. tous les éléments diagonaux de $\mathbb{A}$ sont dans $\mathbb{R}_+^*$.
- b. toutes les valeurs propres de $\mathbb{A}$ sont dans $\mathbb{R}_+^*$.
- c. $\mathbb{A}$ est inversible.

R. 1

- a. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $\mathbf{e}_i \in \mathbb{C}^n$, le i -ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^n$. On a

$$\langle \mathbf{e}_i, \mathbb{A} \mathbf{e}_i \rangle = A_{i,i}.$$

Or, on a

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{e}_i, \mathbb{A} \mathbf{e}_i \rangle &= \langle \mathbb{A}^* \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i \rangle && \text{par propriété du produit scalaire} \\ &= \langle \mathbb{A} \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i \rangle && \text{car } \mathbb{A} \text{ est hermitienne} \\ &= \overline{\langle \mathbf{e}_i, \mathbb{A} \mathbf{e}_i \rangle} && \text{par propriété du produit scalaire} \end{aligned}$$

et donc $A_{i,i} = \overline{A_{i,i}}$, c'est à dire $A_{i,i} \in \mathbb{R}$.

Comme $\mathbb{A}$ est hermitienne définie positive, et, comme $\mathbf{e}_i \neq \mathbf{0}$, on a

$$\langle \mathbb{A} \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i \rangle > 0$$

et donc $A_{i,i} > 0$.

- b. Soit $(\lambda, \mathbf{u}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ un élément propre de $\mathbb{A}$. On a

$$\langle \mathbb{A} \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \langle \lambda \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \bar{\lambda} \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$$

et

$$\langle \mathbf{u}, \mathbb{A} \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u}, \lambda \mathbf{u} \rangle = \lambda \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle.$$

Or $\mathbb{A}$ est hermitienne, donc on a

$$\langle \mathbb{A} \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbb{A}^* \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbb{A} \mathbf{u} \rangle.$$

On en déduit que

$$\bar{\lambda} \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \lambda \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle.$$

le vecteur $\mathbf{u}$ étant non nul, on a $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \|\mathbf{u}\|_2^2 \neq 0$ et donc $\lambda = \bar{\lambda}$, c'est à dire $\lambda \in \mathbb{R}$.

De plus, $\mathbb{A}$ est définie positive entraîne que

$$\lambda \|\mathbf{u}\|_2^2 = \langle \mathbb{A} \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle > 0$$

et donc $\lambda > 0$.

- c. Comme toutes les valeurs propres de $\mathbb{A}$ sont non nulles (puisque strictement positives), $\mathbb{A}$ est inversible.

On note $\underline{x}$ la solution de $\mathbb{A}\underline{x} = \underline{b}$ et on décompose la matrice $\mathbb{A}$ sous la forme $\mathbb{A} = \mathbb{D} - \mathbb{E} - \mathbb{F}$ où $\mathbb{D} = \text{diag}(\mathbb{A})$ est la matrice diagonale telle que, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $D_{i,i} = A_{i,i}$, $\mathbb{E}$ est triangulaire inférieure d'éléments diagonaux nuls, et, $\mathbb{F}$ est triangulaire supérieure d'éléments diagonaux nuls.

On va étudier une méthode itérative pour la résolution du système linéaire $\mathbb{A}\underline{x} = \underline{b}$.

Soit $\underline{x}_0 \in \mathbb{C}^n$ donné. On définit la suite $(\underline{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ par, $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$(\mathbb{D} - \mathbb{E})\underline{x}_{k+1/2} = \mathbb{F}\underline{x}_k + \underline{b} \quad (6.1)$$

$$(\mathbb{D} - \mathbb{F})\underline{x}_{k+1} = \mathbb{E}\underline{x}_{k+1/2} + \underline{b} \quad (6.2)$$

Q. 2

a. Démontrer, en justifiant toutes les opérations utilisées, que le vecteur $\underline{x}_{k+1}$ peut s'écrire sous la forme

$$\underline{x}_{k+1} = \mathbb{B}\underline{x}_k + \underline{c} \quad (6.3)$$

en déterminant le vecteur $\underline{c}$ et en montrant que

$$\mathbb{B} = (\mathbb{D} - \mathbb{F})^{-1} \mathbb{E} (\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1} \mathbb{F}.$$

b. Montrer que

$$\underline{x}_{k+1} - \underline{x} = \mathbb{B}(\underline{x}_k - \underline{x}).$$

c. Montrer que

$$\mathbb{D}^{-1} = (\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1} - \mathbb{D}^{-1} \mathbb{E} (\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1}. \quad (6.4)$$

R. 2

a. La matrice diagonale $\mathbb{D}$ est inversible car, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $D_{i,i} = A_{i,i} > 0$.

On en déduit que les matrices $\mathbb{D} - \mathbb{E}$ (triangulaire inférieure de diagonale la diagonale de $\mathbb{D}$) et $\mathbb{D} - \mathbb{F}$ (triangulaire supérieure de diagonale la diagonale de $\mathbb{D}$) sont inversibles.

De (6.1), on obtient en multipliant à gauche par $(\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1}$

$$\underline{x}_{k+1/2} = (\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1} \mathbb{F} \underline{x}_k + (\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1} \underline{b}.$$

En remplaçant cette expression de $\underline{x}_{k+1/2}$ dans (6.2), on a

$$\begin{aligned} (\mathbb{D} - \mathbb{F})\underline{x}_{k+1} &= \mathbb{E} \left((\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1} \mathbb{F} \underline{x}_k + (\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1} \underline{b} \right) + \underline{b} \\ &= \mathbb{E} (\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1} \mathbb{F} \underline{x}_k + \left(\mathbb{E} (\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1} + \mathbb{I} \right) \underline{b} \end{aligned}$$

En multipliant à gauche cette équation par $(\mathbb{D} - \mathbb{F})^{-1}$, on abouti a

$$\underline{x}_{k+1} = (\mathbb{D} - \mathbb{F})^{-1} \mathbb{E} (\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1} \mathbb{F} \underline{x}_k + (\mathbb{D} - \mathbb{F})^{-1} \left(\mathbb{E} (\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1} + \mathbb{I} \right) \underline{b}$$

En posant

$$\begin{aligned} \mathbb{B} &= (\mathbb{D} - \mathbb{F})^{-1} \mathbb{E} (\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1} \mathbb{F} \\ \underline{c} &= (\mathbb{D} - \mathbb{F})^{-1} \left(\mathbb{E} (\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1} + \mathbb{I} \right) \underline{b} \end{aligned}$$

on obtient (6.3).

b. La matrice $\mathbb{A}$ est inversible et donc $\underline{x}$ est bien définie. De l'équation (6.1), on déduit

$$(\mathbb{D} - \mathbb{E})\underline{x}_{k+1/2} = \mathbb{F}\underline{x}_k + \mathbb{A}\underline{x} = \mathbb{F}\underline{x}_k + (\mathbb{D} - \mathbb{E} - \mathbb{F})\underline{x}$$

et donc

$$(\mathbb{D} - \mathbb{E})(\underline{x}_{k+1/2} - \underline{x}) = \mathbb{F}(\underline{x}_k - \underline{x}) \quad (\text{R6.2})$$

De la même manière à partir de l'équation (6.2), on déduit

$$(\mathbb{D} - \mathbb{F})(\underline{x}_{k+1} - \underline{x}) = \mathbb{E}(\underline{x}_{k+1/2} - \underline{x}) \quad (\text{R6.3})$$

En utilisant (R6.2), l'équation (R6.4) devient

$$(\mathbb{D} - \mathbb{F})(\underline{x}_{k+1} - \underline{x}) = \mathbb{E} (\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1} \mathbb{F} (\underline{x}_k - \underline{x})$$

c'est à dire

$$\underline{x}_{k+1} - \underline{x} = \mathbb{B}(\underline{x}_k - \underline{x}).$$

c. L'expression à démontrer est bien définie car $\mathbb{D}$ et $\mathbb{D} - \mathbb{E}$ inversibles. De plus on a

$$\mathbb{I} = (\mathbb{D} - \mathbb{E})(\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1}$$

En multipliant à gauche cette équation par $\mathbb{D}^{-1}$ on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{D}^{-1} &= \mathbb{D}^{-1} (\mathbb{D} - \mathbb{E})(\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1} \\ &= (\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1} - \mathbb{D}^{-1} \mathbb{E} (\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1}. \end{aligned}$$

Soit $(\lambda, \mathbf{p})$ un élément propre de la matrice $\mathbb{B}$.

Q. 3

a. Montrer que

$$\lambda \mathbb{A} \mathbf{p} + (\lambda - 1) \mathbb{E} \mathbb{D}^{-1} \mathbb{F} \mathbf{p} = 0. \quad (6.5)$$

b. En déduire que

$$\lambda = \frac{\langle \mathbb{F} \mathbf{p}, \mathbb{D}^{-1} \mathbb{F} \mathbf{p} \rangle}{\langle \mathbf{p}, \mathbb{A} \mathbf{p} \rangle + \langle \mathbb{F} \mathbf{p}, \mathbb{D}^{-1} \mathbb{F} \mathbf{p} \rangle} \in [0, 1[. \quad (6.6)$$

c. En déduire la convergence $\mathbf{x}_k$ vers $\underline{\mathbf{x}}$.

R. 3

a. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{B} \mathbf{p} = \lambda \mathbf{p} &\Leftrightarrow (\mathbb{D} - \mathbb{F})^{-1} \mathbb{E} (\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1} \mathbb{F} \mathbf{p} = \lambda \mathbf{p} \\ &\Leftrightarrow \mathbb{E} (\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1} \mathbb{F} \mathbf{p} = \lambda (\mathbb{D} - \mathbb{F}) \mathbf{p} \\ &\Leftrightarrow \mathbb{D}^{-1} \mathbb{E} (\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1} \mathbb{F} \mathbf{p} = \lambda \mathbb{D}^{-1} (\mathbb{D} - \mathbb{F}) \mathbf{p} \end{aligned}$$

De (6.4), on a

$$\mathbb{D}^{-1} \mathbb{E} (\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1} = (\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1} - \mathbb{D}^{-1}$$

et donc

$$\begin{aligned} \mathbb{B} \mathbf{p} = \lambda \mathbf{p} &\Leftrightarrow ((\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1} - \mathbb{D}^{-1}) \mathbb{F} \mathbf{p} = \lambda \mathbb{D}^{-1} (\mathbb{D} - \mathbb{F}) \mathbf{p} \\ &\Leftrightarrow (\mathbb{D} - \mathbb{E}) ((\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1} - \mathbb{D}^{-1}) \mathbb{F} \mathbf{p} = \lambda (\mathbb{D} - \mathbb{E}) \mathbb{D}^{-1} (\mathbb{D} - \mathbb{F}) \mathbf{p} \\ &\Leftrightarrow (\mathbb{I} - \mathbb{I} + \mathbb{E} \mathbb{D}^{-1}) \mathbb{F} \mathbf{p} = \lambda (\mathbb{I} - \mathbb{E} \mathbb{D}^{-1}) (\mathbb{D} - \mathbb{F}) \mathbf{p} \\ &\Leftrightarrow \mathbb{E} \mathbb{D}^{-1} \mathbb{F} \mathbf{p} = \lambda (\mathbb{D} - \mathbb{E} - \mathbb{F} + \mathbb{E} \mathbb{D}^{-1} \mathbb{F}) \mathbf{p} \\ &\Leftrightarrow \mathbb{E} \mathbb{D}^{-1} \mathbb{F} \mathbf{p} = \lambda (\mathbb{A} + \mathbb{E} \mathbb{D}^{-1} \mathbb{F}) \mathbf{p} \end{aligned}$$

On en déduit alors

$$\lambda \mathbb{A} \mathbf{p} + (\lambda - 1) \mathbb{E} \mathbb{D}^{-1} \mathbb{F} \mathbf{p} = 0.$$

b. On déduit de l'équation (6.5)

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \mathbf{p}, \lambda \mathbb{A} \mathbf{p} + (\lambda - 1) \mathbb{E} \mathbb{D}^{-1} \mathbb{F} \mathbf{p} \rangle \\ &= \lambda \langle \mathbf{p}, \mathbb{A} \mathbf{p} \rangle + (\lambda - 1) \langle \mathbf{p}, \mathbb{E} \mathbb{D}^{-1} \mathbb{F} \mathbf{p} \rangle \end{aligned}$$

et donc

$$\lambda (\langle \mathbf{p}, \mathbb{A} \mathbf{p} \rangle + \langle \mathbf{p}, \mathbb{E} \mathbb{D}^{-1} \mathbb{F} \mathbf{p} \rangle) = \langle \mathbf{p}, \mathbb{E} \mathbb{D}^{-1} \mathbb{F} \mathbf{p} \rangle \quad (\text{R6.4})$$

Comme la matrice $\mathbb{A}$ est définie positive, on a $\langle \mathbb{A} \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle > 0$ car $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ (vecteur propre) et donc

$$\langle \mathbf{p}, \mathbb{A} \mathbf{p} \rangle = \overline{\langle \mathbb{A} \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle} = \langle \mathbb{A} \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle > 0.$$

De plus on a

$$\langle \mathbf{p}, \mathbb{E} \mathbb{D}^{-1} \mathbb{F} \mathbf{p} \rangle = \langle \mathbb{E}^* \mathbf{p}, \mathbb{D}^{-1} \mathbb{F} \mathbf{p} \rangle.$$

La matrice $\mathbb{A}$ étant hermitienne, on a $\mathbb{E}^* = \mathbb{F}$ et donc

$$\langle \mathbf{p}, \mathbb{E} \mathbb{D}^{-1} \mathbb{F} \mathbf{p} \rangle = \langle \mathbb{F} \mathbf{p}, \mathbb{D}^{-1} \mathbb{F} \mathbf{p} \rangle.$$

La matrice $\mathbb{A}$ étant définie positive, la matrice diagonale $\mathbb{D}$ est définie positive car $d_{i,i} > 0$, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, et donc $\mathbb{D}^{-1}$ aussi. Comme $\mathbb{F} \mathbf{p}$ n'est pas nécessairement non nul, on a

$$\langle \mathbb{D}^{-1} \mathbb{F} \mathbf{p}, \mathbb{F} \mathbf{p} \rangle \in \mathbb{R}^+.$$

On en déduit

$$\langle \mathbb{F} \mathbf{p}, \mathbb{D}^{-1} \mathbb{F} \mathbf{p} \rangle = \overline{\langle \mathbb{D}^{-1} \mathbb{F} \mathbf{p}, \mathbb{F} \mathbf{p} \rangle} = \langle \mathbb{D}^{-1} \mathbb{F} \mathbf{p}, \mathbb{F} \mathbf{p} \rangle \geq 0.$$

De l'équation (R6.4), on obtient

$$\lambda (\langle \mathbf{p}, \mathbb{A} \mathbf{p} \rangle + \langle \mathbb{F} \mathbf{p}, \mathbb{D}^{-1} \mathbb{F} \mathbf{p} \rangle) = \langle \mathbb{F} \mathbf{p}, \mathbb{D}^{-1} \mathbb{F} \mathbf{p} \rangle.$$

Or

$$\langle \mathbf{p}, \mathbb{A} \mathbf{p} \rangle + \langle \mathbb{F} \mathbf{p}, \mathbb{D}^{-1} \mathbb{F} \mathbf{p} \rangle > 0 \text{ donc } \neq 0$$

ce qui donne

$$\lambda = \frac{\langle \mathbb{F} \mathbf{p}, \mathbb{D}^{-1} \mathbb{F} \mathbf{p} \rangle}{\langle \mathbf{p}, \mathbb{A} \mathbf{p} \rangle + \langle \mathbb{F} \mathbf{p}, \mathbb{D}^{-1} \mathbb{F} \mathbf{p} \rangle}.$$

On a alors $\lambda \in [0, 1[$.

c. En posant $\mathbf{e}_k = \mathbf{x}_k - \underline{\mathbf{x}}$ on a alors

$$\mathbf{e}_k = \mathbb{B}^k \mathbf{e}_0, \quad \forall k \geq 0.$$

Or la suite $\mathbf{x}_k$ converge vers $\underline{\mathbf{x}}$ si et seulement si la suite $\mathbf{e}_k$ converge vers $\mathbf{0}$. Pour cela, d'après le Théorème ??, page ??, il est nécessaire et suffisant d'avoir $\rho(\mathbb{B}) < 1$. Comme toutes les valeurs propres de $\mathbb{B}$ sont dans $[0, 1[$, on a $\rho(\mathbb{B}) < 1$ et donc la convergence est assurée.

Q. 4

- a. Ecrire une fonction algorithmique $[\mathbb{D}, \mathbb{E}, \mathbb{F}] \leftarrow \text{Decomp}(\mathbb{A})$ retournant la décomposition de la matrice $\mathbb{A}$ en $\mathbb{A} = \mathbb{D} - \mathbb{E} - \mathbb{F}$.
- b. Ecrire une fonction algorithmique **RSLiter** utilisant (6.1)-(6.2) pour approcher la solution du système linéaire $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Pour cela on pourra utiliser les fonctions
- $\mathbf{x} \leftarrow \text{RSLtriinf}(\mathbb{A}, \mathbf{b})$ retourne la solution du système $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ où $\mathbb{A}$ est une matrice triangulaire inférieure inversible,
 - $\mathbf{x} \leftarrow \text{RSLtrisup}(\mathbb{A}, \mathbf{b})$ retourne la solution du système $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ où $\mathbb{A}$ est une matrice triangulaire supérieure inversible.

En aucun cas, il ne faudra utiliser les matrices inverses...

R. 4

a. Voici une correction possible:

Algorithme 1 Décomposition d'une matrice $\mathbb{A}$ en $\mathbb{D} - \mathbb{E} - \mathbb{F}$

Données :

$\mathbb{A}$: matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Résultat :

$\mathbb{D}$: matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale,

$\mathbb{E}$: matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire inférieure à diagonale nulle,

$\mathbb{F}$: matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure à diagonale nulle.

```

1: Fonction  $[\mathbb{D}, \mathbb{E}, \mathbb{F}] \leftarrow \text{Decomp}(\mathbb{A})$ 
2:    $\mathbb{D} \leftarrow \mathbf{0}_{n,n}, \mathbb{E} \leftarrow \mathbf{0}_{n,n}, \mathbb{F} \leftarrow \mathbf{0}_{n,n}$ 
3:   Pour  $i \leftarrow 1$  à  $n$  faire
4:     Pour  $j \leftarrow 1$  à  $i - 1$  faire
5:        $\mathbb{E}(i, j) \leftarrow -\mathbb{A}(i, j)$ 
6:     Fin Pour
7:      $\mathbb{D}(i, i) \leftarrow \mathbb{A}(i, i)$ 
8:     Pour  $j \leftarrow i + 1$  à  $n$  faire
9:        $\mathbb{F}(i, j) \leftarrow -\mathbb{A}(i, j)$ 
10:    Fin Pour
11:  Fin Pour
12: Fin Fonction
```

b. Connaissant les vecteurs $\mathbf{x}_k$ et $\mathbf{b}$, ainsi que les matrices $\mathbb{D}$, $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$, il est possible de déterminer $\mathbf{x}_{k+1}$ en effectuant les opérations suivantes:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1/2} &\leftarrow \text{RSLtriinf}(\mathbb{D} - \mathbb{E}, \mathbb{F}\mathbf{x}_k + \mathbf{b}) \\ \mathbf{x}_{k+1} &\leftarrow \text{RSLtrisup}(\mathbb{D} - \mathbb{F}, \mathbb{E}\mathbf{x}_{k+1/2} + \mathbf{b}) \end{aligned}$$

car les matrices $\mathbb{D} - \mathbb{E}$ et $\mathbb{D} - \mathbb{F}$ sont respectivement triangulaire inférieure et triangulaire supérieure. Voici une correction possible:

Algorithme 2 Méthode itérative de l'exercice pour la résolution d'un système linéaire $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$

Données :

$\mathbb{A}$: matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ d'éléments diagonaux non nuls
 $\mathbf{b}$: vecteur de $\mathbb{K}^n$,
 $\mathbf{x}^0$: vecteur initial de $\mathbb{K}^n$,
 ε : la tolérance, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$,
kmax : nombre maximum d'itérations, kmax $\in \mathbb{N}^*$

Résultat :

$\mathbf{X}$: un vecteur de $\mathbb{K}^n$

```
1: Fonction  $\mathbf{X} \leftarrow \text{RSLiter}(\mathbb{A}, \mathbf{b}, \mathbf{x}^0, \varepsilon, \text{kmax})$ 
2:    $k \leftarrow 0, \mathbf{X} \leftarrow \emptyset$ 
3:    $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x}^0, \mathbf{r} \leftarrow \mathbf{b} - \mathbb{A} * \mathbf{x},$ 
4:    $\text{tol} \leftarrow \varepsilon(\|\mathbf{b}\| + 1)$ 
5:    $[\mathbb{D}, \mathbb{E}, \mathbb{F}] \leftarrow \text{Decomp}(\mathbb{A})$ 
6:    $\mathbb{L} \leftarrow \mathbb{D} - \mathbb{E}, \mathbb{U} \leftarrow \mathbb{D} - \mathbb{F}$ 
7:   Tantque  $\|\mathbf{r}\| > \text{tol}$  et  $k \leq \text{kmax}$  faire
8:      $k \leftarrow k + 1$ 
9:      $\mathbf{x} \leftarrow \text{RSLtriinf}(\mathbb{L}, \mathbb{F} * \mathbf{x} + \mathbf{b})$ 
10:     $\mathbf{x} \leftarrow \text{RSLtrisup}(\mathbb{U}, \mathbb{E} * \mathbf{x} + \mathbf{b})$ 
11:     $\mathbf{r} \leftarrow \mathbf{b} - \mathbb{A} * \mathbf{x},$ 
12:  Fin Tantque
13:  Si  $\|\mathbf{r}\| \leq \text{tol}$  alors
14:     $\mathbf{X} \leftarrow \mathbf{x}$ 
15:  Fin Si
16: Fin Fonction
```
