Analyse Numérique I
Résolution de systèmes non linéaires
Exercices supplémentaires

Exercice 1 : Méthode de Dichotomie

On suppose que la fonction f est continue sur $[a, b]$, vérifie $f(a)f(b) < 0$ et qu'il existe un unique $\alpha \in]a, b[$ tel que $f(\alpha) = 0$. On défini les trois suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par

- $a_0 = a$, $b_0 = b$ et $x_0 = \frac{a+b}{2}$,
- $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} a_{k+1} = b_{k+1} = x_k & \text{si } f(x_k) = 0, \\ a_{k+1} = x_k,\ b_{k+1} = b_k & \text{si } f(b_k)f(x_k) < 0, \\ a_{k+1} = a_k,\ b_{k+1} = x_k & \text{si } f(a_k)f(x_k) < 0. \end{cases}$$

et

$$x_{k+1} = (a_{k+1} + b_{k+1})/2.$$

Q. 1

a. Montrer que les suites (a_k) et (b_k) convergent vers α.

b. En déduire que la suite (x_k) converge vers α.

Q. 2

a. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|x_k - \alpha| \leqslant \frac{b-a}{2^{k+1}}$.

b. Soit $\epsilon > 0$. En déduire que si $k \geqslant \frac{\log(\frac{b-a}{\epsilon})}{\log(2)} - 1$ alors $|x_k - \alpha| \leqslant \epsilon$.

Q. 3

[Algo] *Ecrire une fonction algorithmique, nommée* Dichotomie*, retournant une approximation de α avec une précision de ϵ ainsi que le nombre d'itérations nécessaire.*

Exercice 2

Soients $I = [0, \pi/2]$ et $\left\{ \begin{array}{cccc} \Phi & : & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \sin(x) \end{array} \right.$. Soit $x_0 \in I\backslash\{0\}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$x_{k+1} = \Phi(x_k).$$

Q. 1

a. Montrer que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

b. Montrer que la suite converge vers $\alpha \in I$ que l'on déterminera.

Q. 2

a. Montrer que

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|} = 1.$$

b. La convergence est-elle linéaire? Justifier.

Exercice 3

Soients $[a, b]$ un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et ϕ une fonction continue de $[a, b]$ dans lui même ($\phi([a, b]) \subset [a, b]$). Soit $x_0 \in [a, b]$. On considère la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ donnée par

$$x_{k+1} = \phi(x_k)\ \forall k \in \mathbb{N}. \tag{3.1}$$

Q. 1

Montrer que la suite (3.1) *est bien définie (x_k existe pour tout $k \in \mathbb{N}$).*

Q. 2

Montrer que si la suite (3.1) *converge, alors elle converge vers un point fixe de ϕ.*

Q. 3 *Existence du point fixe : montrer qu'il existe $\alpha \in [a,b]$ tel que $\phi(\alpha) = \alpha$.*

On suppose de plus que ϕ est contractante, c'est à dire que

$$\exists\, L \in [0,1[, \text{tel que, } \forall (x,y) \in [a,b]^2,\ |\phi(x) - \phi(y)| \leqslant L|x-y|.$$

Q. 4

a. Montrer que ϕ admet un unique point fixe $\alpha \in [a,b]$.

b. Montrer que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers α, pour toute donnée initiale x_0 dans $[a,b]$.

Q. 5 **[Algo]***Écrire l'algorithme du point fixe (fonction* PointFixe*) permettant de résoudre l'équation $\phi(x) = x$.*

Exercice 4

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé, non vide, (par ex., avec $a < b$, $[a,b]$, $[a,+\infty[$, $]-\infty,a]$ ou $\mathbb{R}$) et $\Phi : I \longrightarrow I$ une application contractante.
Soit $x_0 \in I$. On considère la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ donnée par

$$x_{k+1} = \Phi(x_k)\ \forall k \in \mathbb{N}. \tag{4.1}$$

Q. 1 *Montrer que la suite (4.1) est bien définie (x_k existe pour tout $k \in \mathbb{N}$).*

On va démontrer que la suite (4.1) est une suite de Cauchy.

Q. 2

a. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N},\quad |x_{k+1} - x_k| \leqslant L^k |x_1 - x_0|. \tag{4.2}$$

b. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall l \geqslant 0,\quad |x_{k+l} - x_{k+l-1}| \leqslant L^l |x_k - x_{k-1}|. \tag{4.3}$$

c. En déduire que,

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall p \geqslant 2,\quad |x_{k+p} - x_k| \leqslant \frac{1-L^p}{1-L} L^k |x_1 - x_0|. \tag{4.4}$$

Q. 3

a. Déduire de la question précédente que la suite (4.1) est une suite de Cauchy.

b. Montrer que la suite (4.1) converge vers un point fixe de Φ à l'ordre 1 au moins.

c. Montrer l'unicité du point fixe.

Exercice 5

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $I =]\alpha_-, \alpha_+[$ un voisinage de α et $\phi \in \mathcal{C}^1(I)$. On suppose que α est un point fixe de ϕ tel que

$$|\phi'(\alpha)| < 1.$$

Q. 1

a. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in \mathcal{V} = [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$, $|\phi'(x)| < 1$.

b. Montrer que ϕ est contractante sur $\mathcal{V}$ et que $\phi(\mathcal{V}) \subset \mathcal{V}$.

c. Citer précisement le théorème du cours qui, à partir de Q. 1-a. et b,permet d'en déduire la convergence de l'algorithme du point fixe vers α au moins à l'ordre 1.

Soit $x_0 \in \mathcal{V}$ et la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par l'algorithme du point fixe.

Q. 2 *Montrer que, si $x_0 \in \mathcal{V}\backslash\{\alpha\}$, alors*

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{x_k - \alpha} = \phi'(\alpha). \tag{5.1}$$

Q. 3

Supposons maintenant que $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$ et que

$$\forall i \in [\![1, p]\!], \quad \phi^{(i)}(\alpha) = 0.$$

a. Montrer que la méthode du point fixe est d'ordre $p+1$ au moins.

b. Montrer que, si $x_0 \in \mathcal{V}\backslash\{\alpha\}$, alors

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{x_{k+1}-\alpha}{(x_k-\alpha)^{p+1}} = \frac{\phi^{(p+1)}(\alpha)}{(p+1)!}. \tag{5.2}$$

c. Que peut-on dire si $\phi^{(p+1)}(\alpha) \neq 0$?

Exercice 6

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ vérifiant $f(a)f(b) < 0$. et $\lambda = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Soit $x_0 \in [a, b]$ donné. La suite obtenue par la méthode de la corde est donnée par

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\lambda}, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

On note $\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{\lambda}$.

Q. 1

Montrer que si pour tout $x \in [a, b]$ on a

$$\min(\lambda(x-a), \lambda(x-b)) \leqslant f(x) \leqslant \max(\lambda(x-a), \lambda(x-b)) \tag{6.1}$$

alors $\Phi([a, b]) \subset [a, b]$.

Q. 2

Montrer que si pour tout $x \in [a, b]$ on a

$$\min(0, 2\lambda) < f'(x) < \max(0, 2\lambda) \tag{6.2}$$

alors $|\Phi'(x)| < 1$.

Q. 3

En déduire que sous les deux conditions précédentes la méthode de la corde converge vers l'unique solution $\alpha \in [a, b]$ de $f(x) = 0$.

Exercice 7

En -1700 av. J.-C., les babyloniens ne connaissaient que les nombres rationnels (fractions) et ils utilisaient le système sexagésimal (base 60). Pour approcher la valeur $\sqrt{2}$, ils utilisaient comme approximation (voir tablette YBC 7289)

$$\alpha = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = \frac{30547}{21600}$$

L'erreur commise est $|\alpha - \sqrt{2}| \approx 5.994e - 7$.

Q. 1

*Comment feriez-vous pour trouver **à la main** une méthode permettant de trouver des nombres rationnels approchant $\sqrt{2}$.*

Q. 2

Généraliser la méthode pour trouver une approximation rationnelle de $\sqrt{a}$ où a est un réel positif.

Q. 3

Généraliser la méthode pour trouver une approximation rationnelle de $\sqrt[n]{a}$ où a est un réel positif et $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 8

Q. 1

a. *Soit ϕ une application définie sur $[a, b]$ à valeurs réelles.*

- *A quelle(s) condition(s) a-t'on existence et unicité d'un point fixe $\alpha \in [a, b]$ de Φ?*
- *Sous ces conditions, que peut-on dire de la suite $x_{k+1} = \phi(x_k)$, $\forall k \in \mathbb{N}$ avec $x_0 \in [a, b]$?*

b. [Algo] *Ecrire une **fonction** algorithmique* suitePtFixe *retournant les $(n + 1)$ premiers éléments de la suite des itérés de la méthode du point fixe pour une fonction ϕ (attention la fonction algorithmique est vraiment différente de ce que l'on a vu en cours: l'objectif n'est pas le même!).*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 10$. On cherche à approcher la racine positive, notée α, de l'équation $f(x) = 0$ par une méthode de point fixe. On pose $\phi_\omega(x) = x - \omega f(x)$, avec $\omega \in \mathbb{R}^{+*}$.

Q. 2

On choisit ici, $\omega = 1$.

a. *Montrer que α est un point fixe de ϕ_1.*

b. *Démontrer le résultat intermédiaire suivant: soit $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^+$, alors*

$$|g(a)| > b \quad \Longrightarrow \quad \exists \delta > 0,\ \forall x \in [a - \delta, a + \delta],\ |g(x)| > b.$$

c. *Démontrer qu'il existe $\delta > 0$, tel que*

$$\forall x \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta] \backslash \{\alpha\}, \quad |\phi_1(x) - \alpha| > |x - \alpha|.$$

d. *Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, que peut-on dire de la convergence de la suite $x_{k+1} = \phi_1(x_k)$, $\forall k \in \mathbb{N}$?*

on pose $\phi_\omega(x) = x - \omega f(x)$, avec $0 < \omega < 1$.

Q. 3

Montrer que α est un point fixe de ϕ_ω, pour tout $\omega \neq 0$.

Dans la suite, on choisit $\omega = \frac{1}{8}$ et on pose $x_{k+1} = \phi_{\frac{1}{8}}(x_k)$, pour $k \in \mathbb{N}$.

Q. 4

a. *En utilisant un théorème du cours que l'on citera précisemment, montrer que $\phi_{\frac{1}{8}}$ a un unique point fixe α dans $[3, 4]$ et que la suite des itérés de l'algorithme du point fixe converge vers α, pour tout x_0 dans $[3, 4]$.*

b. *Pour x_0 suffisamment proche de α, la convergence est de quelle ordre exactement?.*

On va montrer, par une autre preuve, les résultats de la question 4, sans utiliser le théorème général du cours. Cela permettra aussi d'estimer précisément la vitesse de convergence de la méthode du point fixe appliquée à $\phi_{\frac{1}{8}}$.

Q. 5

Soit $x_0 \in [3, 4]$, $x_0 \neq \alpha$.

a. *Montrer que*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad (x_{k+1} - \alpha) = (x_k - \alpha) \left[1 - \frac{1}{8}(x_k + \alpha) \right].$$

b. *En utilisant **a.** et $\phi_{\frac{1}{8}}([3, 4]) \subset [3, 4]$ (à établir), montrer que*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \left| 1 - \frac{1}{8}(x_k + \alpha) \right| \leqslant \frac{5 - \alpha}{8}.$$

c. *En déduire que la suite $(x_k)_{k \geqslant 0}$ converge vers α, et que la convergence est linéaire.*

d. *Montrer que*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad |x_k - \alpha| \leqslant \left(\frac{5 - \alpha}{8} \right)^k |x_0 - \alpha|.$$

e. *En déduire que*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad |x_k - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{4} \right)^k,$$

puis estimer le nombre d'itérations suffisant pour obtenir une valeur de α précise à $\varepsilon > 0$ près.

Q. 6
[Algo] *Proposer un* **programme** *algorithmique permettant de calculer les* 20 *premiers termes de la suite des itérés de l'algorithme du point fixe pour la fonction* $\phi_{\frac{1}{8}}$. *Toutes les données devront être initialisées.*

Exercice 9

Q. 1
Citer précisement le théorème de convergence du point fixe dans $\mathbb{R}$ *pour une application contractante.*

On rappelle que, de manière générale, la suite des itérés $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de la méthode de Newton pour la résolution de l'équation $g(x) = 0$ est

$$z_{k+1} = z_k - \frac{g(z_k)}{g'(z_k)}, \quad \text{avec } z_0 \text{ donné.}$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$, on définit la fonction f_λ par

$$\left\{\begin{array}{cccc} f_\lambda & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & x^2 - \lambda \end{array}\right. .$$

On note $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite des itérés de la méthode de Newton pour la résolution de l'équation $f_\lambda(x) = 0$ pour x_0 donné.

Q. 2
a. *Expliciter la fonction* Φ *telle que* $x_{k+1} = \Phi(x_k)$.

b. *Etablir le tableau de variations de la fonction* Φ.

c. *En déduire que* $\Phi(x) \geqslant \sqrt{\lambda}$, $\forall x \in]0, +\infty[$.

d. *Montrer que l'application* Φ *est contractante sur* $[\sqrt{\lambda}, +\infty[$.

Q. 3
Soit $x_0 \in [\sqrt{\lambda}, +\infty[$.

a. *Montrer que la suite* $(x_k)_{k\geqslant 1}$ *est bien définie*

b. *En déduire que cette suite converge vers* $\sqrt{\lambda}$.

Q. 4
Soit $x_0 \in [\sqrt{\lambda}, +\infty[$. *on note* $e_k = x_k - \sqrt{\lambda}$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

a. *Montrer que*

$$e_{k+1} = \frac{e_k^2}{2x_k}. \tag{9.1}$$

b. *En déduire l'ordre de convergence de la suite (en justifiant!)*

Q. 5
Que peut-on dire de la suite $(x_k)_{k\geqslant 1}$, *si* $x_0 \in]0, \sqrt{\lambda}[$? *Justifier.*

Exercice 10

Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach et $U \subset \mathcal{B}$ un sous-ensemble fermé. On suppose que $\boldsymbol{\Phi} : U \longrightarrow U$ est une application contractante. Soit $\boldsymbol{x}^{[0]} \in U$. On note $(\boldsymbol{x}^{[k]})_{k\in\mathbb{N}}$, la suite récurrente donnée par

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \boldsymbol{x}^{[k+1]} = \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}^{[k]}). \tag{10.1}$$

Q. 1
Montrer que la suite (10.1) *est bien définie* (x_k *existe pour tout* $k \in \mathbb{N}$).

On va démontrer que la suite (10.1) est une suite de Cauchy.

Q. 2
a. *Montrer que*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \left\|\boldsymbol{x}^{[k+1]} - \boldsymbol{x}^{[k]}\right\| \leqslant L^k \left\|\boldsymbol{x}^{[1]} - \boldsymbol{x}^{[0]}\right\|. \tag{10.2}$$

b. *Montrer que*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ \forall l \geqslant 0, \quad \|x_{k+l} - x_{k+l-1}\| \leqslant L^l \left\|\boldsymbol{x}^{[k]} - \boldsymbol{x}^{[k-1]}\right\|. \tag{10.3}$$

c. *En déduire que,*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ \forall p \geqslant 2, \quad \left\|\boldsymbol{x}^{[k+p]} - \boldsymbol{x}^{[k]}\right\| \leqslant \frac{1 - L^p}{1 - L} L^k \left\|\boldsymbol{x}^{[1]} - \boldsymbol{x}^{[0]}\right\|. \tag{10.4}$$

Q. 3

a. *Déduire de la question précédente que la suite* (10.1) *est une suite de Cauchy.*

b. *Montrer que la suite* (10.1) *converge vers un point fixe de* Φ *à l'ordre* 1 *au moins.*

c. *Montrer l'unicité du point fixe.*