Analyse Numérique I
Résolution de systèmes non linéaires
Exercices supplémentaires

Exercice 1 : Méthode de Dichotomie

On suppose que la fonction f est continue sur $[a, b]$, vérifie $f(a)f(b) < 0$ et qu'il existe un unique $\alpha \in]a, b[$ tel que $f(\alpha) = 0$. On défini les trois suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par

- $a_0 = a$, $b_0 = b$ et $x_0 = \frac{a+b}{2}$,
- $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} a_{k+1} = b_{k+1} = x_k & \text{si } f(x_k) = 0, \\ a_{k+1} = x_k,\ b_{k+1} = b_k & \text{si } f(b_k)f(x_k) < 0, \\ a_{k+1} = a_k,\ b_{k+1} = x_k & \text{si } f(a_k)f(x_k) < 0. \end{cases}$$

et

$$x_{k+1} = (a_{k+1} + b_{k+1})/2.$$

Q. 1

a. *Montrer que les suites (a_k) et (b_k) convergent vers α.*

b. *En déduire que la suite (x_k) converge vers α.*

R. 1

a. Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $f(x_k) = 0$, (i.e. $x_k = \alpha$ car $x_k \in [a, b]$) alors par construction $a_{k+i} = b_{k+i} = x_{k+i} = \alpha$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$. Ceci assure la convergence des 3 suites vers α.

   Supposons maintenant que $\forall k \in \mathbb{N}$, $f(x_k) \neq 0$. Par construction, nous avons $a_k \leqslant a_{k+1} \leqslant b$, $a \leqslant b_{k+1} \leqslant b_k$ et $a_k \leqslant b_k$. La suite (a_k) est convergente car elle est croissante et majorée. La suite (b_k) est décroissante et minorée : elle est donc convergente. De plus $0 \leqslant b_k - a_k \leqslant \frac{b_{k-1}-a_{k-1}}{2}$ et donc $0 \leqslant b_k - a_k \leqslant \frac{b-a}{2^k}$. On en déduit que les suites (a_k) et (b_k) ont même limite. Comme par construction, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in [a_k, b_k]$ ceci entraine que α est la limite de ces 2 suites.

b. Par construction, $\forall k \in \mathbb{N}$,, $a_k \leqslant x_k \leqslant b_k$. D'après le théorème des gendarmes, les suites (a_k) et (b_k) convergeant vers α, on obtient la convergence de la suite (x_k) vers α.

Q. 2

a. *Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|x_k - \alpha| \leqslant \frac{b-a}{2^{k+1}}$.*

b. *Soit $\epsilon > 0$. En déduire que si $k \geqslant \frac{\log(\frac{b-a}{\epsilon})}{\log(2)} - 1$ alors $|x_k - \alpha| \leqslant \epsilon$.*

R. 2

a. On a $\forall k \in \mathbb{N}$, $x_k = \frac{a_k+b_k}{2}$ et $a_k \leqslant \alpha \leqslant b_k$ d'où $|x_k - \alpha| \leqslant \frac{b_k-a_k}{2}$. Ce qui donne

$$|x_k - \alpha| \leqslant \frac{b-a}{2^{k+1}}.$$

b. Pour avoir $|x_k - \alpha| \leqslant \epsilon$, il suffit d'avoir $\frac{b-a}{2^{k+1}} \leqslant \epsilon$, et la fonction log étant croissante on obtient

$$k \geqslant \frac{\log(\frac{b-a}{\epsilon})}{\log(2)} - 1.$$

Q. 3

[Algo] *Ecrire une fonction algorithmique, nommée* Dichotomie*, retournant une approximation de α avec une précision de ϵ ainsi que le nombre d'itérations nécessaire.*

R. 3

Voici un exemple d'une telle fonction (existence mais non unicité de racines)

Algorithme 1 Méthode de dichotomie pour la recherche d'une racine α de f

Données : a, b : deux réels $a < b$,
f : $f \in \mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R})$ et $f(a)f(b) < 0$
eps : un réel strictement positif.

Résultat : x : un réel tel que $|x - \alpha| \leqslant$ eps.
iter : nombre d'itérations nécesssaire.

Fonction $[x, iter] \leftarrow$ Dichotomie($f, a, b,$ eps)
  $A,\ B \in \mathbb{R}$
  $A \leftarrow a,\ B \leftarrow b,\ x \leftarrow (a+b)/2$
  $iter \leftarrow 0$
  Tantque $|x - A| >$ eps **faire**
    Si $f(x) == 0$ **alors**
      $A \leftarrow x,\ B \leftarrow x$
    Sinon Si $f(B)f(x) < 0$ **alors**
      $A \leftarrow x$ ▷ B inchangé
    Sinon
      $B \leftarrow x$ ▷ A inchangé
    Fin Si
    $x \leftarrow (A+B)/2$
    $iter \leftarrow iter + 1$
  Fin Tantque
Fin Fonction

Exercice 2

Soient $I = [0, \pi/2]$ et $\left\{ \begin{array}{ccccc} \Phi & : & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \sin(x) \end{array} \right.$. Soit $x_0 \in I \backslash \{0\}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$x_{k+1} = \Phi(x_k).$$

Q. 1

a. Montrer que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

b. Montrer que la suite converge vers $\alpha \in I$ que l'on déterminera.

R. 1

a. Pour cela, il suffit de démontrer par récurrence sur k que $x_k \in I$.

- Initialisation: $x_0 \in I$, par hypothèse.
- Hérédité: Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose $x_k \in I$, et on peut donc calculer $f(x_k)$ et définir $x_{k+1} = \Phi(x_k)$. Or, sur $\mathbb{R}_+$, on a $\sin(x) \leqslant x$, (étudier $g(x) = x - \sin(x)$ ...). Comme $x_k \in I$ et que $\sin(x) \geqslant 0, \forall x \in I$, on obtient
$$0 \leqslant x_{k+1} = \sin(x_k) \leqslant x_k$$
et donc $x_{k+1} \in I$.

b. On a vu que la suite était décroissante ($x_{k+1} \leqslant x_k$) et minorée par 0: elle est donc convergente. Notons $\alpha \in \mathbb{R}$ sa limite.
On a, $\forall k \in \mathbb{N}$, $x_k \in I$, un fermé borné de $\mathbb{R}$, donc $\alpha \in I$.
Comme Φ est continue sur I, on a
$$\lim_{k\to+\infty} \Phi(x_k) = \Phi\big(\lim_{k\to+\infty} x_k\big) = f(\alpha)$$
De plus, on a
$$\lim_{k\to+\infty} \Phi(x_k) = \lim_{k\to+\infty} x_{k+1} = \alpha$$
et donc $\alpha \in I$ est un point fixe de Φ.

En posant $g(x) = x - \Phi(x)$, on a $g(0) = 0$ et, $\forall x \in I\backslash 0$, $g'(x) = 1 - \cos(x) > 0$ c'est à dire $g(x) > 0$: la seule racine de g dans I est donc 0 et c'est alors l'unique point fixe de Φ, i.e. $\alpha = 0$.

Q. 2

a. Montrer que

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{|x_{k+1}-\alpha|}{|x_k-\alpha|} = 1.$$

b. La convergence est-elle linéaire? Justifier.

R. 2

a. Comme $x_0 \in I\backslash\{0\}$, ar une simple récurrence, on peut montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad 0 < x_k < 1.$$

Soit $k \in \mathbb{N}$. Comme $\Phi \in \mathcal{C}^1$, on a, en utilisant la formule de Taylor-Lagrange,

$$\xi_k \in]\min(\alpha, x_k), \max(\alpha, x_k)[, \quad \Phi(x_k) = \Phi(\alpha) + (x_k - \alpha)\Phi'(\xi_k).$$

On obtient donc

$$\Phi(x_k) - \Phi(\alpha) = x_{k+1} - \alpha = (x_k - \alpha)\Phi'(\xi_k)$$

Comme $x_k - \alpha \neq 0$, on en déduit

$$\frac{|x_{k+1}-\alpha|}{|x_k-\alpha|} = \Phi'(\xi_k).$$

Or x_k converge vers α et $\xi_k \in]\min(\alpha, x_k), \max(\alpha, x_k)[$ entraine $\xi_k \underset{k\to+\infty}{\to} \alpha$.
La fonction Φ' étant continue, un passage à limite donne

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{|x_{k+1}-\alpha|}{|x_k-\alpha|} = \lim_{k\to+\infty} \Phi'(\xi_k) = \Phi'(\alpha) = \cos(0) = 1.$$

b. La convergence n'est pas linéaire car il aurait fallu démontrer l'existence de $\mu \in]0,1[$ telle que

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{|x_{k+1}-\alpha|}{|x_k-\alpha|} = \mu.$$

La convergence est donc sous-linéaire.

Exercice 3

Soient $[a, b]$ un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et ϕ une fonction continue de $[a, b]$ dans lui même ($\phi([a, b]) \subset [a, b]$). Soit $x_0 \in [a, b]$. On considère la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ donnée par

$$x_{k+1} = \phi(x_k)\ \forall k \in \mathbb{N}. \tag{3.1}$$

Q. 1

Montrer que la suite (3.1) *est bien définie (x_k existe pour tout $k \in \mathbb{N}$).*

R. 1

La suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, est bien définie si la relation (3.1) permet de définir complètement (et de manière unique) l'ensemble des termes de la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, connaissant x_0.

Dans le cas présent, il faut s'assurer que $x_k \in [a, b]$ pour tout entier k car la fonction ϕ n'est par hypothèse définie que sur $[a, b]$. En effet, si x_k n'appartient pas à l'intervalle $[a, b]$, alors on ne peut pas définir x_{k+1} puisque $\phi(x_k)$ n'existe pas.

Nous montrons ce résultat pas récurrence :

- Initialisation pour $k = 0$. Par hypothèse, $x_0 \in [a, b]$.
- Hérédité: nous supposons que $x_k \in [a, b]$ et nous allons montrer que $x_{k+1} \in [a, b]$. Par définition, $x_{k+1} = \phi(x_k)$. Puisque par hypothèse, $\phi([a, b]) \subset [a, b]$, on en déduit immédiatement que $x_{k+1} \in [a, b]$.

> **Remarque.** *hypothèse importante :* $\phi([a, b]) \subset [a, b]$.

Q. 2

Montrer que si la suite (3.1) converge, alors elle converge vers un point fixe de ϕ.

R. 2

Supposons que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite notée $\bar{x}$. $\bar{x} \in [a, b]$ car $[a, b]$ est un intervalle fermé. Par ailleurs, en utilisant la continuité de ϕ, on a

$$\lim_{k\to+\infty} \phi(x_k) = \phi(\bar{x}).$$

Par les théorème de comparaison des limites et la relation (3.1), on a:

$$\bar{x} = \lim_{k\to+\infty} x_{k+1} \overbrace{=}^{(3.1)} \lim_{k\to+\infty} \phi(x_k) = \phi(\bar{x}).$$

Ainsi $\bar{x} = \phi(\bar{x})$ et donc $\bar{x}$ est un point fixe de ϕ.

Remarque. *hypothèses importantes : $[a, b]$ est fermé et ϕ est continue sur $[a, b]$.*

Q. 3

Existence du point fixe : montrer qu'il existe $\alpha \in [a, b]$ tel que $\phi(\alpha) = \alpha$.

R. 3

On considère la fonction g définie par $g(x) = \phi(x) - x$. Comme $\phi([a, b]) \subset [a, b]$,

$$g(a) = \phi(a) - a \geqslant a - a \geqslant 0.$$

De manière similaire,

$$g(b) = \phi(b) - b \leqslant b - b \leqslant 0.$$

Puisque ϕ est continue sur $[a, b]$, le théorème des valeurs intermédiaires (ou Bolzano) (sur $[a, b]$, ϕ prend toutes les valeurs entre $\phi(a)$et $\phi(b)$) garantit l'existence d'un nombre $\alpha \in [a, b]$ tel que $g(\alpha) = 0$. Or

$$0 = g(\alpha) = \phi(\alpha) - \alpha,$$

donc α est un point fixe de ϕ.

Remarque. *L'hypothèse de continuité de ϕ est cruciale. Le résultat est faux si ϕ n'est pas continue. On peut par exemple considérer la fonction $\phi_0 : [-1, 1] \to [-1, 1]$ telle que $\phi_0(x) = \frac{1}{2}$ si $-1 \leqslant x \leqslant 0$, et $\phi_0(x) = -\frac{1}{2}$ si $0 < x \leqslant 1$, qui n'admet pas de point fixe sur $[-1, 1]$ (voir Figure 1).*

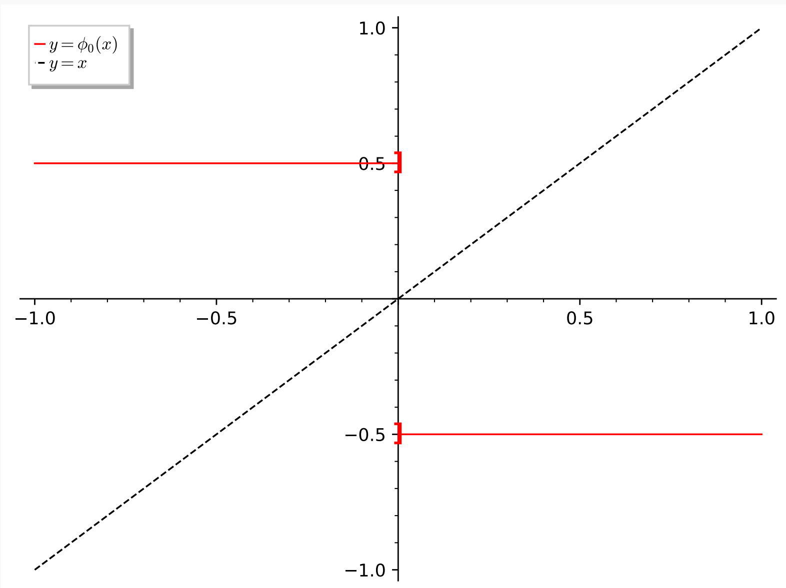

Figure 1: Graphe représentatif de la fonction ϕ_0 et de la droite $y = x$

On pourra aussi remarquer qu'il n'y a pas forcément unicité du point fixe. En effet, la fonction ϕ définie par $\phi(x) = x$, $\forall x \in [a, b]$ est continue de $[a, b]$ dans $[a, b]$ et admet une infinité de points fixes.

On suppose de plus que ϕ est contractante, c'est à dire que

$$\exists\, L \in [0,1[, \text{tel que, } \forall (x,y) \in [a,b]^2,\ |\phi(x) - \phi(y)| \leqslant L|x-y|.$$

Q. 4

a. Montrer que ϕ admet un unique point fixe $\alpha \in [a,b]$.

b. Montrer que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers α, pour toute donnée initiale x_0 dans $[a,b]$.

R. 4

a. Nous utilisons une démarche classique pour montrer l'unicité. Nous supposons que la fonction ϕ admet deux points fixes α_1 et α_2 ($\alpha_1 = \phi(\alpha_1)$ et $\alpha_2 = \phi(\alpha_2)$) et nous allons montrer que $\alpha_1 = \alpha_2$. En utilisant le fait que ϕ est contractante, on a

$$|\alpha_1 - \alpha_2| = |\phi(\alpha_1) - \phi(\alpha_2)| \leqslant L|\alpha_1 - \alpha_2|.$$

ce qui peut être réécrit comme

$$(1-L)|\alpha_1 - \alpha_2| \leqslant 0. \tag{R3.1}$$

Comme $(1-L) > 0$, l'inégalité (R3.1) implique $|\alpha_1 - \alpha_2| \leqslant 0$ et donc $\alpha_1 = \alpha_2$. La fonction ϕ a donc au plus un point fixe.

b. On a montré, dans les questions précédentes, que la fonction ϕ admet un unique point fixe $\alpha \in [a,b]$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$|x_{k+1} - \alpha| = |\phi(x_k) - \phi(\alpha)| \leqslant L|x_k - \alpha|,$$

si bien que, par récurrence, on peut montrer que

$$|x_k - \alpha| \leqslant L^k |x_0 - \alpha|, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Comme $L < 1$, $\lim\limits_{k\to+\infty} L^k = 0$ et donc le terme de droite de l'inégalité précédente tend vers 0. Par le théorème de comparaison des limites,

$$\lim_{k\to+\infty} |x_k - \alpha| = 0.$$

Q. 5

[Algo]*Écrire l'algorithme du point fixe (fonction* PointFixe*) permettant de résoudre l'équation $\phi(x) = x$.*

R. 5

On écrit ci-dessous l'algorithme du point fixe, en supposant que l'on recherche un point fixe non nul.

Algorithme 2 Fonction PointFixe : résout $\phi(x) = x$ par la méthode du point fixe

Données : ϕ : fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
x_0 : nombre réel, (donnée initiale)
tol : nombre réel strictement positif (tolérance)
$k_{\max}$: nombre entier supérieur ou égal à 1 (nombre maximal d'itérations)

Résultat : x : un réel tel que $\frac{|\phi(x)-x|}{|x|+1} \leqslant tol$

Fonction $x \leftarrow$ PointFixe$(\phi, x_0, tol, k_{\max})$
  $k \leftarrow 1$
  $x \leftarrow \phi(x_0)$
  $r \leftarrow \frac{|x-x_0|}{|x|+1}$ ▷ résidu à l'itération 1
  Tantque $r > tol$ et $k \leqslant k_{\max}$ **faire**
    $x_0 \leftarrow x$
    $x \leftarrow \phi(x_0)$
    $r \leftarrow \frac{|x-x_0|}{|x|+1}$ ▷ résidu à l'itération k+1
    $k \leftarrow k+1$
  Fin Tantque
Fin Fonction

Exercice 4

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé, non vide, (par ex., avec $a < b$, $[a, b]$, $[a, +\infty[$, $]-\infty, a]$ ou $\mathbb{R}$) et $\Phi : I \longrightarrow I$ une application contractante.

Soit $x_0 \in I$. On considère la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ donnée par

$$x_{k+1} = \Phi(x_k)\ \forall k \in \mathbb{N}. \tag{4.1}$$

Q. 1

Montrer que la suite (4.1) est bien définie (x_k existe pour tout $k \in \mathbb{N}$).

R. 1

La suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, est bien définie si la relation (4.1) permet de définir complètement (et de manière unique) l'ensemble des termes de la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, connaissant x_0.

Il faut donc vérifier que, $\forall k \in \mathbb{N}$, $x_k \in I$, car il faut pouvoir calculer $\Phi(x_k)$ et que Φ est définie sur I.

C'est bien sur immédiat par récurrence car $\Phi(I) \subset I$. On propose toutefois une démonstration:

- Initialisation: pour $k = 0$. Par hypothèse, $x_0 \in I$.
- Hérédité: on suppose $x_k \in I$, montrons que $x_{k+1} \in I$. Par définition, $x_{k+1} = \Phi(x_k)$. Puisque par hypothèse, $\Phi(I) \subset I$, on a $x_{k+1} \in I$.

On va démontrer que la suite (4.1) est une suite de Cauchy.

Q. 2

a. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad |x_{k+1} - x_k| \leqslant L^k |x_1 - x_0|. \tag{4.2}$$

b. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall l \geqslant 0, \quad |x_{k+l} - x_{k+l-1}| \leqslant L^l |x_k - x_{k-1}|. \tag{4.3}$$

c. En déduire que,

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall p \geqslant 2, \quad |x_{k+p} - x_k| \leqslant \frac{1 - L^p}{1 - L} L^k |x_1 - x_0|. \tag{4.4}$$

R. 2

a. La fonction Φ étant contractante sur I, on a, par définition:

$$\exists L \in [0, 1[\ \text{ t.q } \ \forall (x, y) \in I^2, \quad |\Phi(x) - \Phi(y)| \leqslant L|x - y|.$$

On obtient alors

$$|x_{k+1} - x_k| = |\Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1})| \leqslant L|x_k - x_{k-1}|.$$

Par récurrence, on en déduit que la proposition suivante est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$(\mathcal{P}_k) : \quad |x_{k+1} - x_k| \leqslant L^k |x_1 - x_0|.$$

On propose toutefois une démonstration:

- Initialisation: $(\mathcal{P}_0)$ est trivialement vraie.
- Hérédité: soit $k \in \mathbb{N}$, on suppose que $(\mathcal{P}_k)$ est vérifiée. Montrons que $(\mathcal{P}_{k+1})$ est vraie. On a, en utilisant (4.1) et l'hypothèse de contraction sur Φ,

$$|x_{k+2} - x_{k+1}| = |\Phi(x_{k+1}) - \Phi(x_k)| \leqslant L|x_{k+1} - x_k|.$$

Par hypothèse de récurrence, on en déduit

$$|x_{k+2} - x_{k+1}| \leqslant LL^k |x_1 - x_0|$$

et donc $(\mathcal{P}_{k+1})$ est vraie.

b. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $p \geqslant 2$. On a

$$|x_{k+p} - x_k| = |(x_{k+p} - x_{k+p-1}) + (x_{k+p-1} - x_{k+p-2}) + \ldots + (x_{k+1} - x_k)| = |\sum_{l=0}^{p-1} (x_{k+l+1} - x_{k+l})|.$$

Par application répétée de l'inégalité triangulaire, on obtient

$$|x_{k+p} - x_k| \leqslant \sum_{l=0}^{p-1} |x_{k+l+1} - x_{k+l}|$$

En utilisant (4.3), on obtient alors

$$|x_{k+p} - x_k| \leqslant \sum_{l=0}^{p-1} L^l |x_{k+1} - x_k| = |x_{k+1} - x_k| \sum_{l=0}^{p-1} L^l.$$

La somme correspond alors à une somme partielle d'une série géométrique et donc

$$|x_{k+p} - x_k| \leqslant \frac{1 - L^p}{1 - L} |x_{k+1} - x_k|.$$

En utilisant (4.2), on obtient alors (4.4).

Q. 3

a. Déduire de la question précédente que la suite (4.1) *est une suite de Cauchy.*

b. Montrer que la suite (4.1) *converge vers un point fixe de* Φ *à l'ordre* 1 *au moins.*

c. Montrer l'unicité du point fixe.

R. 3

a. On a $0 \leqslant L < 1$, et donc $L^k \to 0$ quand $k \to +\infty$. De (4.4), on déduit alors que (x_k) est une suite de Cauchy.
On propose toutefois une démonstration détaillée.
Pour que (x_k) soit une suite de Cauchy, il faut montrer que

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists M \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall k \in \mathbb{N}, \ k \geqslant M, \ \forall p \in \mathbb{N}, \quad |x_{k+p} - x_k| < \epsilon.$$

Comme $0 < L < 1$, on a

$$|x_{k+p} - x_k| \leqslant \frac{1}{1 - L} L^k |x_1 - x_0|$$

Soit $\epsilon > 0$, pour avoir $|x_{k+p} - x_k| < \epsilon$, il est suffisant d'avoir

$$\frac{1}{1 - L} L^k |x_1 - x_0| < \epsilon$$

c'est à dire, comme $1 - L > 0$,

$$L^k < \frac{(1 - L)\epsilon}{|x_1 - x_0|}.$$

La fonction ln étant croissante strictement on obtient

$$\ln(L^k) = k \ln(L) < \ln\Big(\frac{(1 - L)\epsilon}{|x_1 - x_0|}\Big).$$

Or $\ln(L) < 0$, ce qui donne

$$k > \frac{1}{\ln(L)} \ln\Big(\frac{(1 - L)\epsilon}{|x_1 - x_0|}\Big).$$

En prenant $M \in \mathbb{N}$ tel que

$$M > \frac{1}{\ln(L)} \ln\Big(\frac{(1 - L)\epsilon}{|x_1 - x_0|}\Big)$$

alors

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ k \geqslant M, \ \forall p \in \mathbb{N}, \quad |x_{k+p} - x_k| < \epsilon.$$

b. La suite (x_k) est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ espace complet donc elle converge dans $\mathbb{R}$ vers un point que l'on nomme β. De plus pour tout k, x_k appartient à I fermé, donc sa limite β appartient aussi à I.
La fonction Φ étant contractante sur I, elle est donc continue sur I. On a alors par continuité de Φ

$$\lim_{k \to +\infty} \Phi(x_k) = \Phi(\beta).$$

Comme $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ on aussi

$$\lim_{k \to +\infty} \Phi(x_k) = \lim_{k \to +\infty} x_{k+1} = \beta$$

et donc β est un point fixe de Φ. L'existence d'un point fixe est donc établi.
On a donc

$$|x_{k+1} - \beta| = |\Phi(x_k) - \Phi(\beta)| \leqslant L|x_k) - \beta|.$$

Comme $0 \leqslant L < 1$, la convergence est au moins d'ordre 1.

c. On suppose qu'il existe β_1 et β_2 dans $[a,b]$ tels que $\Phi(\beta_1) = \beta_1$ et $\Phi(\beta_2) = \beta_2$. Dans ce cas on a
$$|\beta_1 - \beta_2| = |\Phi(\beta_1) - \Phi(\beta_2)| \leqslant L|\beta_1 - \beta_2|.$$
On en déduit
$$(1-L)|\beta_1 - \beta_2| \leqslant 0$$
Comme $1 - L > 0$, on en déduit $\beta_1 = \beta_2$, c'est à dire l'unicité du point fixe.

Exercice 5

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $I =]\alpha_-, \alpha_+[$ un voisinage de α et $\phi \in \mathcal{C}^1(I)$. On suppose que α est un point fixe de ϕ tel que
$$|\phi'(\alpha)| < 1.$$

Q. 1

a. *Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in \mathcal{V} = [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$, $|\phi'(x)| < 1$.*

b. *Montrer que ϕ est contractante sur $\mathcal{V}$ et que $\phi(\mathcal{V}) \subset \mathcal{V}$.*

c. *Citer précisement le théorème du cours qui, à partir de Q. 1-a. et b,permet d'en déduire la convergence de l'algorithme du point fixe vers α au moins à l'ordre 1.*

R. 1

a. Puisque ϕ' est continue et que $|\phi'(\alpha)| < 1$, il existe $\delta > 0$ et un intervalle fermé $\mathcal{V} = [\alpha - \delta, \alpha + \delta] \subset]\alpha_-, \alpha_+[$ tels que pour tout $x \in \mathcal{V}$, $|\phi'(x)| < 1$.
On propose ici une démonstration de ce résultat.

- Comme ϕ' est continue en α, on a
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \beta > 0 \text{ tel que } \forall x \in I,\ \Big(|x - \alpha| < \beta \Rightarrow\ |\phi'(x) - \phi'(\alpha)| < \varepsilon\Big).$$
On note $M = \phi'(\alpha)$ et on prend $\varepsilon = 1 - |M|$ qui est strictement positif car $0 \geqslant |M| = |\phi'(\alpha)| < 1$. Dans ce cas, il existe $\beta > 0$ tel que $]\alpha - \beta, \alpha + \beta[\subset I$ et
$$\forall x \in I,\ \Big(|x - \alpha| < \beta \Rightarrow\ |\phi'(x) - M| < 1 - |M|\Big).$$
Soit $x \in I$ tel que $|x - \alpha| < \beta$, c'est à dire $x \in]\alpha - \beta, \alpha + \beta[$, alors on a
$$\begin{aligned} |\phi'(x) - M| < 1 - |M| &\Leftrightarrow\ -1 + |M| < \phi'(x) - M < 1 - |M| \\ &\Leftrightarrow\ -1 + M + |M| < \phi'(x) < 1 + M - |M| \end{aligned}$$
Comme $-|M| \leqslant M \leqslant |M|$, on a $M + |M| \geqslant 0$ et $M - |M| \leqslant 0$, ce qui entraine
$$|\phi'(x) - M| < 1 - |M| \Rightarrow\ -1 < \phi'(x) < 1.$$
On a donc,
$$\forall x \in]\alpha - \beta, \alpha + \beta[,\ |\phi'(x)| < 1.$$
En posant $\delta = \beta/2$ (par ex.), on obtient, en définissant $\mathcal{V} = [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$,
$$\forall x \in \mathcal{V}, \quad |\Phi'(x)| < 1.$$

□

b. On pose
$$L = \sup_{x \in \mathcal{V}} |\phi'(x)| = \max_{x \in \mathcal{V}} |\phi'(x)|.$$
Comme $\mathcal{V}$ est fermé, $L < 1$. Soient $(x,y) \in \mathcal{V}^2$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $\xi \in]x, y[\subset \mathcal{V}$ telle que
$$\phi(x) - \phi(y) = \phi'(\xi)(x - y).$$
Puisque $|\phi'(\xi)| \leqslant L$, on obtient
$$\forall (x,y) \in \mathcal{V}^2, |\phi(x) - \phi(y)| \leqslant L|x - y|,$$

ce qui signifie ϕ est contractante sur $\mathcal{V}$. De plus, si $x \in \mathcal{V}$, en utilisant la formule précédente avec $y = \alpha \in \mathcal{V}$, on obtient

$$|\phi(x) - \alpha| \leqslant L|x - \alpha| < |x - \alpha| \leqslant \delta,$$

et donc $\phi(x) \in \mathcal{V}$. Ainsi on a $\phi(\mathcal{V}) \subset \mathcal{V}$.

c. Voici le théorème du cours:

> **Théorème** (Théorème du point fixe dans $\mathbb{R}$, application contractante)**.** *Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé, non vide, et Φ une application contractante de I dans lui-même. Alors, il existe un unique point $\alpha \in I$ vérifiant $\Phi(\alpha) = \alpha$. Le point α est appelé **point fixe de la fonction** Φ. Pour tout $x_0 \in I$, la suite*
>
> $$x_{k+1} = \Phi(x_k), \ \forall k \in \mathbb{N} \tag{R5.2}$$
>
> *est bien définie et elle converge vers α avec un ordre 1 au moins.*

Soit $x_0 \in \mathcal{V}$ et la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par l'algorithme du point fixe.

Q. 2

Montrer que, si $x_0 \in \mathcal{V}\backslash\{\alpha\}$, alors

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{x_k - \alpha} = \phi'(\alpha). \tag{5.1}$$

R. 2

Avec $x_0 \in \mathcal{V}\backslash\{\alpha\}$, d'après Q. 1, la suite définie par $x_{k+1} = \phi(x_k), \ \forall k \in \mathbb{N}$ converge vers α à l'ordre 1 au moins. Comme α est un point fixe de ϕ, i.e. $\alpha = \phi(\alpha)$ et $x_{k+1} = \phi(x_k), \ \forall k \in \mathbb{N}$, avec $x_0 \neq \alpha$, on a $\forall k \in \mathbb{N}$, $x_k \neq \alpha$. On a donc

$$\frac{x_{k+1} - \alpha}{x_k - \alpha} = \frac{\phi(x_k) - \phi(\alpha)}{x_k - \alpha}.$$

Comme la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers α avec $\forall k \in \mathbb{N}$, $x_k \neq \alpha$ et que ϕ est dérivable en α on obtient

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\phi(x_k) - \phi(\alpha)}{x_k - \alpha} = \phi'(\alpha).$$

Q. 3

Supposons maintenant que $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$ et que

$$\forall i \in [\![1, p]\!], \quad \phi^{(i)}(\alpha) = 0.$$

a. *Montrer que la méthode du point fixe est d'ordre $p + 1$ au moins.*

b. *Montrer que, si $x_0 \in \mathcal{V}\backslash\{\alpha\}$, alors*

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{(x_k - \alpha)^{p+1}} = \frac{\phi^{(p+1)}(\alpha)}{(p+1)!}. \tag{5.2}$$

c. *Que peut-on dire si $\phi^{(p+1)}(\alpha) \neq 0$?*

R. 3

a. Comme $\phi'(\alpha) = 0$, alors (en particulier) $|\phi'(\alpha)| < 1$. D'après la question 1, cela signifie que pour tout $x_0 \in \mathcal{V}$, la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par l'algorithme du point fixe (R9.10) converge vers α.
Soit $k \in \mathbb{N}$. En utilisant la formule de Taylor-Lagrange, il existe $\xi_k \in]\min(\alpha, x_k), \max(\alpha, x_k)[$ tel que

$$x_{k+1} - \alpha = \phi(x_k) - \phi(\alpha) = \sum_{i=1}^{p} \frac{(x_k - \alpha)^i}{i!} \underbrace{\phi^{(i)}(\alpha)}_{=0} + \frac{(x_k - \alpha)^{p+1}}{(p+1)!} \phi^{(p+1)}(\xi_k)$$

c'est à dire

$$x_{k+1} - \alpha = \frac{(x_k - \alpha)^{p+1}}{(p+1)!} \phi^{(p+1)}(\xi_k). \tag{R5.3}$$

De plus, $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$, $\phi^{(p+1)}$ est continue sur $\mathcal{V}$, un fermé borné et donc

$$\exists C > 0, \ \text{tel que } \forall x \in \mathcal{V}, \ |\phi^{(p+1)}(x)| \leqslant C.$$

Comme $\xi_k \in \mathcal{V}$, on déduit de (R5.3) que

$$|x_{k+1} - \alpha| \leqslant \frac{C}{(p+1)!} |x_k - \alpha|^{p+1}$$

et donc la convergence est d'ordre $(p+1)$ au moins.

b. La fonction $\phi^{(p+1)}$ étant continue et $\lim_{k\to+\infty}\xi_k=\alpha$, on a

$$\lim_{k\to+\infty}\phi^{(p+1)}(\xi_k)=\phi^{(p+1)}(\alpha).$$

Comme $x_0\in\mathcal{V}\backslash\{\alpha\}$, on a $\forall k\in\mathbb{N}$, $x_k\neq\alpha$ et donc (R5.3) peut s'écrire

$$\frac{x_{k+1}-\alpha}{(x_k-\alpha)^{p+1}}=\frac{\phi^{(p+1)}(\xi_k)}{(p+1)!} \tag{R5.4}$$

En prenant la limite, on obtient

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{x_{k+1}-\alpha}{(x_k-\alpha)^{p+1}}=\frac{1}{(p+1)!}\phi^{(p+1)}(\alpha).$$

c. Soit $\varepsilon>0$. En multipliant la valeur absolue de (R5.4) par $|x_k-\alpha|^{-\varepsilon}\neq 0$, on obtient

$$\frac{|x_{k+1}-\alpha|}{|x_k-\alpha|^{p+1+\varepsilon}}=|x_k-\alpha|^{-\varepsilon}\frac{|\phi^{(p+1)}(\xi_k)|}{(p+1)!}$$

Or $|x-\alpha|^{-\varepsilon}\underset{x\to\alpha}{\to}+\infty$, et $\phi^{(p+1)}(x)\underset{x\to\alpha}{\to}\phi^{(p+1)}(\alpha)\neq 0$, ce qui entraine

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{|x_{k+1}-\alpha|}{|x_k-\alpha|^{p+1+\varepsilon}}=\lim_{k\to+\infty}|x_k-\alpha|^{-\varepsilon}\frac{|\phi^{(p+1)}(\xi_k)|}{(p+1)!}=+\infty.$$

Donc, $\forall\varepsilon>0$, la convergence n'est pas d'ordre $p+1+\varepsilon$. Elle est d'ordre $(p+1)$ (exactement).

Exercice 6

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ vérifiant $f(a)f(b)<0$. et $\lambda=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Soit $x_0\in[a,b]$ donné. La suite obtenue par la méthode de la corde est donnée par

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{\lambda},\quad\forall k\in\mathbb{N}.$$

On note $\Phi(x)=x-\frac{f(x)}{\lambda}$.

Q. 1 *Montrer que si pour tout $x\in[a,b]$ on a*

$$\min(\lambda(x-a),\lambda(x-b))\leqslant f(x)\leqslant\max(\lambda(x-a),\lambda(x-b)) \tag{6.1}$$

alors $\Phi([a,b])\subset[a,b]$.

R. 1

Si $\lambda>0$, l'inéquation (6.1) devient

$$\begin{aligned}\lambda(x-b)\leqslant f(x)\leqslant\lambda(x-a) &\Leftrightarrow a\leqslant x-\frac{f(x)}{\lambda}\leqslant b\\ &\Leftrightarrow a\leqslant\Phi(x)\leqslant b.\end{aligned}$$

Si $\lambda<0$, l'inéquation (6.1) devient

$$\begin{aligned}\lambda(x-a)\leqslant f(x)\leqslant\lambda(x-b) &\Leftrightarrow a\leqslant x-\frac{f(x)}{\lambda}\leqslant b\\ &\Leftrightarrow a\leqslant\Phi(x)\leqslant b.\end{aligned}$$

Q. 2 *Montrer que si pour tout $x\in[a,b]$ on a*

$$\min(0,2\lambda)<f'(x)<\max(0,2\lambda) \tag{6.2}$$

alors $|\Phi'(x)|<1$.

R. 2

Si $\lambda > 0$, l'inéquation (6.2) devient

$$\begin{aligned} 0 < f'(x) < 2\lambda &\Leftrightarrow 0 < \frac{f'(x)}{\lambda} < 2 \\ &\Leftrightarrow -1 < 1 - \frac{f'(x)}{\lambda} < 1 \\ &\Leftrightarrow -1 < \Phi'(x) < 1. \end{aligned}$$

Si $\lambda < 0$, l'inéquation (6.2) devient

$$\begin{aligned} 2\lambda < f'(x) < 0 &\Leftrightarrow 0 < \frac{f'(x)}{\lambda} < 2 \\ &\Leftrightarrow -1 < 1 - \frac{f'(x)}{\lambda} < 1 \\ &\Leftrightarrow -1 < \Phi'(x) < 1. \end{aligned}$$

Q. 3

En déduire que sous les deux conditions précédentes la méthode de la corde converge vers l'unique solution $\alpha \in [a, b]$ de $f(x) = 0$.

R. 3

Sous les hypothèses (6.1) et (6.2) on a $\Phi([a, b]) \subset [a, b]$ et $\forall x \in [a, b]$, $|\Phi'(x)| < 1$. Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, la fonction Φ l'est aussi. La suite (x_k) est définie par $x_{k+1} = \Phi(x_k)$. Ainsi les hypothèses du théorème 1.4 sont vérifiées ce qui assure l'unicité du point fixe ainsi que la convergence de la suite (x_k) vers ce point fixe.

Exercice 7

En -1700 av. J.-C., les babyloniens ne connaissaient que les nombres rationnels (fractions) et ils utilisaient le système sexagésimal (base 60). Pour approcher la valeur $\sqrt{2}$, ils utilisaient comme approximation (voir tablette YBC 7289)

$$\alpha = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = \frac{30547}{21600}$$

L'erreur commise est $|\alpha - \sqrt{2}| \approx 5.994e-7$.

Q. 1

Comment feriez-vous pour trouver ***à la main*** *une méthode permettant de trouver des nombres rationnels approchant $\sqrt{2}$.*

R. 1

Il suffit de voir que $\sqrt{2}$ est la racine positive de $f(x) = x^2 - 2$ et d'appliquer la méthode de Newton par exemple. La suite des itérés de Newton s'écrit alors

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^2 - 2}{2x_k} = \frac{x_k^2 + 2}{2x_k}$$

Avec $x_0 = 1$, on obtient

k	x_k	$\lvert\sqrt{2} - x_k\rvert$
1	$\frac{3}{2}$	8.57864e-02
2	$\frac{17}{12}$	2.45310e-03
3	$\frac{577}{408}$	2.12390e-06

Avec $x_0 = \frac{5}{4}$, on obtient

k	x_k	$\lvert\sqrt{2} - x_k\rvert$
1	$\frac{57}{40}$	1.07864e-02
2	$\frac{6449}{4560}$	4.08236e-05
3	$\frac{83176801}{58814880}$	5.89203e-10

Q. 2

Généraliser la méthode pour trouver une approximation rationnelle de $\sqrt{a}$ où a est un réel positif.

R. 2

Il suffit de voir que $\sqrt{a}$ est la racine positive de $f(x) = x^2 - a$ et d'appliquer la méthode de Newton par exemple. La suite des itérés de Newton s'écrit alors

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^2 - a}{2x_k} = \frac{x_k^2 + a}{2x_k}$$

Avec $a = 3$ et $x_0 = 1$, on obtient

k	x_k	$\lvert\sqrt{3} - x_k\rvert$
1	2	2.67949e-01
2	$\frac{7}{4}$	1.79492e-02
3	$\frac{97}{56}$	9.20496e-05

Q. 3

Généraliser la méthode pour trouver une approximation rationnelle de $\sqrt[n]{a}$ où a est un réel positif et $n \in \mathbb{N}^*$.

R. 3

Il suffit de voir que $\sqrt[n]{a}$ est la racine positive de $f(x) = x^n - a$ et d'appliquer la méthode de Newton par exemple. La suite des itérés de Newton s'écrit alors

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^n - a}{n x_k^{n-1}} = \frac{(n-1)x_k^n + a}{n x_k^{n-1}}$$

Avec $a = 3$, $n = 4$ et $x_0 = 1$, on obtient

k	x_k	$\lvert\sqrt[4]{3} - x_k\rvert$
1	$\frac{3}{2}$	1.83926e-01
2	$\frac{97}{72}$	3.11482e-02
3	$\frac{115403137}{87616608}$	1.06368e-03
4	$\frac{23629729727100883781673808 5152257}{17954694319970098486448341 6264832}$	1.28780e-06

Exercice 8

Q. 1

a. *Soit ϕ une application définie sur $[a, b]$ à valeurs réelles.*

- *A quelle(s) condition(s) a-t'on existence et unicité d'un point fixe $\alpha \in [a, b]$ de Φ?*
- *Sous ces conditions, que peut-on dire de la suite $x_{k+1} = \phi(x_k)$, $\forall k \in \mathbb{N}$ avec $x_0 \in [a, b]$?*

b. [Algo] *Ecrire une* ***fonction*** *algorithmique* suitePtFixe *retournant les $(n+1)$ premiers éléments de la suite des itérés de la méthode du point fixe pour une fonction ϕ (attention la fonction algorithmique est vraiment différente de ce que l'on a vu en cours: l'objectif n'est pas le même!).*

R. 1

a. Si ϕ une application continue de $[a, b]$ dans lui-même. Alors, il existe **au moins** un point $\alpha \in [a, b]$ vérifiant $\phi(\alpha) = \alpha$. Le point α est appelé **point fixe de la fonction** ϕ.
De plus, si ϕ est contractante (lipschitzienne de rapport $L \in [0, 1[$), c'est à dire

$$\exists L < 1 \text{ t.q. } |\phi(x) - \phi(y)| \leqslant L|x - y| \ \forall (x, y) \in [a, b]^2,$$

alors ϕ admet un **unique** point fixe $\alpha \in [a, b]$.
Dans ce cas la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bien définie et elle converge vers α avec un ordre 1 au moins.

b. On cherche à retourner les $(n+1)$ valeurs $x_0, \ldots, x_n$.

Algorithme 3 Fonction retournant les $(n+1)$ premiers éléments de la suite des itérés $x_{k+1} = \phi(x_k)$, $\forall k \geqslant 0$ avec $x_0 \in [a,b]$.

Données :

ϕ : $\phi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$,
x_0 : donnée initiale, $x_0 \in [a,b]$,
n : dans $\mathbb{N}$

Résultat :

$\boldsymbol{X}$: dans $\mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\boldsymbol{X}(k+1) = x_k$, $\forall k \in [\![0,n]\!]$

```
Fonction X ← suitePtFixe( φ, x_0, n )
  X(1) ← x_0
  Pour k ← 1 à n faire X(k+1) ← φ(X(k))
  Fin Pour
Fin Fonction
```

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 10$. On cherche à approcher la racine positive, notée α, de l'équation $f(x) = 0$ par une méthode de point fixe. On pose $\phi_\omega(x) = x - \omega f(x)$, avec $\omega \in \mathbb{R}^{+*}$.

Q. 2

On choisit ici, $\omega = 1$.

a. *Montrer que* α *est un point fixe de* ϕ_1.

b. *Démontrer le résultat intermédiaire suivant: soit* $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R};\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$ *et* $b \in \mathbb{R}^+$, *alors*

$$|g(a)| > b \quad \Longrightarrow \quad \exists \delta > 0,\ \forall x \in [a-\delta, a+\delta],\ |g(x)| > b.$$

c. *Démontrer qu'il existe* $\delta > 0$, *tel que*

$$\forall x \in [\alpha-\delta, \alpha+\delta] \backslash \{\alpha\}, \quad |\phi_1(x) - \alpha| > |x - \alpha|.$$

d. *Soit* $x_0 \in \mathbb{R}$, *que peut-on dire de la convergence de la suite* $x_{k+1} = \phi_1(x_k)$, $\forall k \in \mathbb{N}$*?*

R. 2

a. On a $\phi_1(\alpha) = \alpha - f(\alpha) = \alpha$ (car α est une racine de f), donc α est bien un point fixe de ϕ_1.

b. La fonction g étant continue, on a

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}, |x - a| < \eta \ \Rightarrow\ |g(x) - g(a)| < \varepsilon.$$

De plus, comme

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \big||x| - |y|\big| \leqslant |x - y|$$

on obtient

$$\big||g(x)| - |g(a)|\big| \leqslant |g(x) - g(a)|$$

et donc

$$|g(x) - g(a)| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad -\varepsilon + |g(a)| < |g(x)| < \varepsilon + |g(a)|.$$

En choisissant, par exemple, $\varepsilon = \frac{1}{2}(|g(a)| - b) > 0$, on obtient

$$|g(x)| > -\varepsilon + |g(a)| = \frac{1}{2}(|g(a)| + b) > \frac{1}{2}(b + b) = b$$

et donc, on a démontré

$$\text{avec } \varepsilon = \frac{1}{2}(|g(a)| - b) > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}, |x - a| < \eta \ \Rightarrow\ |g(x)| > b.$$

En posant $\delta = \dfrac{\eta}{2}$, et en rappelant que $[a-\delta, a+\delta] = \{x \in \mathbb{R}, |x - a| \leqslant \delta\}$ on obtient

$$\exists \delta > 0,\ \forall x \in [a-\delta, a+\delta],\ |g(x)| > b.$$

c. Comme ϕ_1 est $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$, on peut appliquer la formule de Taylor:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists \xi_x \in]\min(x,\alpha), \max(x,\alpha)[, \quad \phi_1(x) = \phi_1(\alpha) + (x - \alpha)\phi_1'(\xi_x).$$

On en déduit

$$|\phi_1(x) - \alpha| = |x - \alpha||\phi_1'(\xi_x)|.$$

Or $|\phi_1'(\alpha)| > 1$, et $\phi_1' \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R};\mathbb{R})$, on peut donc appliquer le résultat précédent avec $g = \phi_1'$, pour obtenir

$$\exists \delta > 0,\ \forall x \in [\alpha-\delta, \alpha+\delta],\ |\phi_1'(x)| > 1.$$

On obtient alors

$$\forall x \in [\alpha-\delta, \alpha+\delta]\backslash\{\alpha\},\ |\phi_1(x) - \alpha| = |x-\alpha||\phi_1'(\xi_x)| > |x-\alpha|.$$

d. On a alors

$$|\phi_1(x_k) - \alpha| = |x_{k+1} - \alpha| > |x_k - \alpha|.$$

La suite x_k, ne peut converger vers α (mais elle pourrait peut-être converger vers une autre valeur...).

on pose $\phi_\omega(x) = x - \omega f(x)$, avec $0 < \omega < 1$.

Q. 3 *Montrer que α est un point fixe de ϕ_ω, pour tout $\omega \neq 0$.*

R. 3 On a

$$f(\alpha) = 0 \iff \omega f(\alpha) = 0 \quad (\text{car } \omega \neq 0) \iff \alpha - \omega f(\alpha) = \alpha \iff \phi_\omega(\alpha) = \alpha,$$

et donc α est un point fixe de ϕ_ω.

Dans la suite, on choisit $\omega = \frac{1}{8}$ et on pose $x_{k+1} = \phi_{\frac{1}{8}}(x_k)$, pour $k \in \mathbb{N}$.

Q. 4

a. *En utilisant un théorème du cours que l'on citera précisemment, montrer que $\phi_{\frac{1}{8}}$ a un unique point fixe α dans $[3,4]$ et que la suite des itérés de l'algorithme du point fixe converge vers α, pour tout x_0 dans $[3,4]$.*

b. *Pour x_0 suffisamment proche de α, la convergence est de quelle ordre exactement?.*

R. 4

a. Voici l'énoncé du théorème du point fixe dans $\mathbb{R}$ pour les applications $\mathcal{C}^1$ (Théorème 1.4 dans [?]):

Théorème. *Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé, non vide, et $\Phi \in \mathcal{C}^1(I)$ vérifiant $\Phi(I) \subset I$ et*

$$\exists L < 1 \text{ tel que } \forall x \in I,\ |\Phi'(x)| \leqslant L, \tag{R8.5}$$

Soit $x_0 \in I$ et $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $x_{k+1} = \Phi(x_k)$. On a alors

(a) la fonction Φ admet un unique point fixe $\alpha \in I$,

(b) $\forall k \in \mathbb{N},\ x_k \in I$,

(c) la suite (x_k) converge vers α avec un ordre 1 au moins.

(d) Si $x_0 \neq \alpha$, alors

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{x_{k+1}-\alpha}{x_k - \alpha} = \Phi'(\alpha). \tag{R8.6}$$

et, si $\Phi'(\alpha) \neq 0$, la convergence est d'ordre 1 (exactement).

Appliquons le théorème du cours :

- $\phi_{\frac{1}{8}}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[3,4]$ (c'est un polynôme).
- On a $\phi_{\frac{1}{8}}([3,4]) \subset [3,4]$. En effet, $\phi_{\frac{1}{8}} \in \mathcal{C}^1([3,4])$ et $\phi_{\frac{1}{8}}'(x) = 1 - \frac{x}{4}$ qui est positif sur $[3,4]$, donc $\phi_{\frac{1}{8}}$ est croissante sur $[3,4]$. Puisque $\phi_{\frac{1}{8}}$ est continue et croissante sur $[3,4]$, on a $\phi_{\frac{1}{8}}([3,4]) = [\phi_{\frac{1}{8}}(3), \phi_{\frac{1}{8}}(4)] = [3+\frac{1}{8}, 4-\frac{6}{8}] \subset [3,4]$ (on peut aussi faire un tableau de variations).
- On a $|\phi_{\frac{1}{8}}'(x)| \leqslant \frac{1}{4} < 1,\ \forall x \in [3,4]$.

D'après le théorème, $\phi_{\frac{1}{8}}$ a donc un unique point fixe α dans $[3,4]$, et la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ (de la méthode du point fixe) converge vers α, pour tout x_0 dans $[3,4]$.

b. On a

$$\phi'_{\frac{1}{8}}(\alpha) = 1 - \frac{\sqrt{10}}{4} \neq 0, \tag{R8.7}$$

et donc, d'après le théorème la convergence est d'ordre 1 exactement.

On va montrer, par une autre preuve, les résultats de la question 4, sans utiliser le théorème général du cours. Cela permettra aussi d'estimer précisément la vitesse de convergence de la méthode du point fixe appliquée à $\phi_{\frac{1}{8}}$.

Q. 5

Soit $x_0 \in [3, 4]$, $x_0 \neq \alpha$.

a. *Montrer que*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad (x_{k+1} - \alpha) = (x_k - \alpha)\left[1 - \frac{1}{8}(x_k + \alpha)\right].$$

b. *En utilisant **a.** et $\phi_{\frac{1}{8}}([3, 4]) \subset [3, 4]$ (à établir), montrer que*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \left|1 - \frac{1}{8}(x_k + \alpha)\right| \leqslant \frac{5 - \alpha}{8}.$$

c. *En déduire que la suite $(x_k)_{k \geqslant 0}$ converge vers α, et que la convergence est linéaire.*

d. *Montrer que*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad |x_k - \alpha| \leqslant \left(\frac{5 - \alpha}{8}\right)^k |x_0 - \alpha|.$$

e. *En déduire que*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad |x_k - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^k,$$

puis estimer le nombre d'itérations suffisant pour obtenir une valeur de α précise à $\varepsilon > 0$ près.

R. 5

a. On a:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{1}{8}\left[(x_k)^2 - 10\right].$$

De plus, comme $f(\alpha) = 0 \iff \alpha^2 - 10 = 0 \iff \alpha^2 = 10$, on a

$$(x_k)^2 - 10 = (x_k)^2 - \alpha^2 = (x_k - \alpha)(x_k + \alpha).$$

On a donc

$$(x_{k+1} - \alpha) = (x_k - \alpha)\left[1 - \frac{1}{8}(x_k + \alpha)\right]. \tag{R8.8}$$

b. On a déjà établi, en **Q.** 4, que $\phi_{\frac{1}{8}}([3, 4]) \subset [3, 4]$. Comme $x_0 = 3$, la suite des itérés $x_{k+1} = \phi_{\frac{1}{8}}(x_k)$ est bien définie et $x_k \in [3, 4]$ pour tout $k \geqslant 0$. On en déduit que

$$\frac{3 + \alpha}{8} \leqslant \frac{1}{8}(x_k + \alpha) \leqslant \frac{4 + \alpha}{8}$$

et donc

$$0 \leqslant \frac{4 - \alpha}{8} \leqslant 1 - \frac{1}{8}(x_k + \alpha) \leqslant \frac{5 - \alpha}{8},$$

ce qui permet d'établir que

$$\left|1 - \frac{1}{8}(x_k + \alpha)\right| \leqslant \frac{5 - \alpha}{8}.$$

c. A partir de (R8.8), on obtient alors

$$|x_{k+1} - \alpha| = |x_k - \alpha|\left|1 - \frac{1}{8}(x_k + \alpha)\right| \leqslant \frac{5 - \alpha}{8}|x_k - \alpha|.$$

On pose $C = \frac{5-\alpha}{8}$. Comme $\alpha \in [3, 4]$, on a $0 < C \leqslant \frac{1}{4} < 1$ et on obtient

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad |x_{k+1} - \alpha| \leqslant C|x_k - \alpha|.$$

On en déduit (voir Définition 1.29 dans [?]) que la suite (x_k) converge vers α à l'ordre 1 **au moins** (au moins aussi rapidement qu'une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$).

Pour que la suite converge vers α à l'ordre 1 **exactement** il faut (voir (10) dans [?]) que

$$\exists \mu \in]0,1[, \quad \text{tel que } \lim_{k\to+\infty} \frac{|x_{k+1}-\alpha|}{|x_k-\alpha|} = \mu.$$

Comme $x_0 \neq \alpha$, on a alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $x_k \neq \alpha$ et, de (R8.8), on obtient

$$\frac{|x_{k+1}-\alpha|}{|x_k-\alpha|} = \left|1 - \frac{1}{8}(x_k+\alpha)\right| \underset{k\to+\infty}{\rightarrow} \left|1-\frac{1}{4}\alpha\right| \overset{\text{def}}{=} \mu$$

Comme $\alpha \in [3,4]$, on obtient

$$0 < 1 - \frac{1}{12} \leqslant \mu \leqslant 1 - \frac{1}{16} < 1$$

et donc la convergence est d'ordre 1 exactement, c'est à dire, la convergence est linéaire.

> **Remarque.** *pour démontrer ce résultat, il n'etait pas nécessaire de montrer que la convergence est d'ordre* 1 *au moins.*

d. Par récurrence sur k, on obtient alors

$$\forall k \in \mathbb{N}, |x_k - \alpha| \leqslant \left(\frac{5-\alpha}{8}\right)^k |x_0-\alpha|. \tag{R8.9}$$

On propose toutefois la démonstration de cette inégalité (par récurrence faible).

- **Initialisation**: pour $k=0$, l'inégalité (R8.9) est vraie, car $|x_0-\alpha| \leqslant |x_0-\alpha|$.
- **Hérédité**: soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose (R8.9) vraie au rang k, et on va montrer qu'elle est vérifiée au rang $k+1$. on a montré que

  $$|x_{k+1}-\alpha| \leqslant \left(\frac{5-\alpha}{8}\right)|x_k-\alpha|,$$

  Par hypothèse de récurrence, on obtient

  $$|x_{k+1}-\alpha| \leqslant \left(\frac{5-\alpha}{8}\right)\left(\frac{5-\alpha}{8}\right)^k |x_0-\alpha| = \left(\frac{5-\alpha}{8}\right)^{k+1}|x_0-\alpha|.$$

  et donc l'inégalité est vérifiée au rang $k+1$.
- **Conclusion**: l'inégalité est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$.

e. On a montré que $C = \frac{5-\alpha}{8} \leqslant \frac{1}{4}$ (voir **R. 5** c). En utilisant cette inégalité dans celle donnée en **Q. 5** d, et comme $|x_0-\alpha| \leqslant 1$ on obtient

$$|x_k-\alpha| \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^k |x_0-\alpha| \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^k.$$

Pour obtenir une valeur de α précise à $\varepsilon > 0$ près, il faut déterminer une valeur de k pour laquelle $|x_k-\alpha| \leqslant \varepsilon$. Pour cela, il suffit d'avoir

$$|x_k-\alpha| \leqslant \frac{1}{4^k} \leqslant \varepsilon.$$

La fonction ln étant croissant sur $\mathbb{R}+$, on obtient

$$\ln\left(\frac{1}{4^k}\right) \leqslant \ln(\varepsilon) \quad \Leftrightarrow \quad \ln(1) - k\ln(4) \leqslant \ln(\varepsilon) \quad \Leftrightarrow \quad k \geqslant -\frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(4)} \overset{\text{def}}{=} k_{\min}.$$

> **Remarque.** *Par exemple avec* $\varepsilon = $ `1e-05`, *on obtient* $k \geqslant k_{\min}$, *avec* $k_{\min} \approx 8.3048$ *et alors*
>
> $$\forall k \geqslant 9, \quad |x_k-\alpha| \leqslant \texttt{1e-05}.$$

Q. 6

[Algo] *Proposer un* ***programme*** *algorithmique permettant de calculer les* 20 *premiers termes de la suite des itérés de l'algorithme du point fixe pour la fonction* $\phi_{\frac{1}{8}}$. *Toutes les données devront être initialisées.*

R. 6

$g \leftarrow \left(x \mapsto x - (1/8) * (x^2 - 10)\right)$
$\boldsymbol{X} \leftarrow \text{suitePtFixe}(g, 3, 19)$

Exercice 9

Q. 1

Citer précisément le théorème de convergence du point fixe dans $\mathbb{R}$ pour une application contractante.

R. 1

Voici le Théorème 1.3 tiré de [?]:

> **Théorème** (Théorème du point fixe dans $\mathbb{R}$ (application contractante))**.** *Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé, non vide, et Φ une application contractante de I dans lui-même. Alors, il existe un unique point $\alpha \in I$ vérifiant $\Phi(\alpha) = \alpha$. Le point α est appelé **point fixe de la fonction** Φ. Pour tout $x_0 \in I$, la suite*
>
> $$x_{k+1} = \Phi(x_k), \ \forall k \in \mathbb{N} \tag{R9.10}$$
>
> *est bien définie et elle converge vers α avec un ordre 1 au moins.*

On rappelle que, de manière générale, la suite des itérés $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de la méthode de Newton pour la résolution de l'équation $g(x) = 0$ est

$$z_{k+1} = z_k - \frac{g(z_k)}{g'(z_k)}, \quad \text{avec } z_0 \text{ donné.}$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$, on définit la fonction f_λ par

$$\left\{ \begin{array}{llll} f_\lambda & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & x^2 - \lambda \end{array} \right. .$$

On note $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite des itérés de la méthode de Newton pour la résolution de l'équation $f_\lambda(x) = 0$ pour x_0 donné.

Q. 2

a. Expliciter la fonction Φ telle que $x_{k+1} = \Phi(x_k)$.

b. Etablir le tableau de variations de la fonction Φ.

c. En déduire que $\Phi(x) \geqslant \sqrt{\lambda}$, $\forall x \in]0, +\infty[$.

d. Montrer que l'application Φ est contractante sur $[\sqrt{\lambda}, +\infty[$.

R. 2

a. On pose

$$\Phi(x) \stackrel{\text{def}}{=} x - \frac{f_\lambda(x)}{f'_\lambda(x)} = x - \frac{x^2 - \lambda}{2\,x} = \frac{x^2 + \lambda}{2\,x}.$$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^*$. La suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ des itérés de la méthode de Newton pour la résolution de l'équation $f_\lambda(x) = 0$ est donnée, pour tout $k \geqslant 0$, par

$$x_{k+1} = \Phi(x_k).$$

b. On établi le tableau de variations de la fonction Φ sachant que $\Phi'(x) = \frac{x^2-\lambda}{2\,x^2}$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{\lambda}$		0			$\sqrt{\lambda}$		$+\infty$
$\Phi'(x)$	$\frac{1}{2}$	$+$	0	$-$	$-\infty$ ||	$+\infty$	$-$	0	$+$	$\frac{1}{2}$
$\Phi(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\sqrt{\lambda}$	$\searrow$	$-\infty$ ||	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{\lambda}$	$\nearrow$	$+\infty$

c. Directement, du tableau de variations, on a $\Phi(x) \geqslant \sqrt{\lambda}$, $\forall x \in]0, +\infty[$ car Φ est décroissante sur $]0, \sqrt{\lambda}[$, croissante sur $]\sqrt{\lambda}, +\infty[$ et $\Phi(\sqrt{\lambda}) = \sqrt{\lambda}$.

d. On a $\forall x \in [\sqrt{\lambda}, +\infty[$, $\Phi'(x) \in [0, \frac{1}{2}[$. D'après la formule de Taylor $\forall (x, y) \in [\sqrt{\lambda}, +\infty[^2$, $\exists \xi \in]x, y[$ tel que

$$\Phi(x) = \Phi(y) + (x - y)\Phi'(\xi).$$

On en déduit alors

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| = |x - y||\Phi'(\xi)| \leqslant \frac{1}{2}|x - y|.$$

La fonction Φ est donc contractante (Définition 1.22, [?]) de rapport $L = \frac{1}{2} < 1$ sur $[\sqrt{\lambda}, +\infty[$.

Q. 3

Soit $x_0 \in [\sqrt{\lambda}, +\infty[$.

a. *Montrer que la suite $(x_k)_{k\geqslant 1}$ est bien définie*

b. *En déduire que cette suite converge vers $\sqrt{\lambda}$.*

R. 3

a. Pour que la suite soit bien définie, il faut et il suffit que $x_k \neq 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$. On a $x_1 = \Phi(x_0) \in [\sqrt{\lambda}, +\infty[$. De plus, comme $\Phi\big([\sqrt{\lambda}, +\infty[\big) \subset [\sqrt{\lambda}, +\infty[$, on en déduit par récurrence que

$$\forall k \geqslant 1, x_{k+1} = \Phi(x_k) \in [\sqrt{\lambda}, +\infty[.$$

Donc, on a $x_k \neq 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

b. l'intervalle $[\sqrt{\lambda}, +\infty[$ est un fermé de $\mathbb{R}$ et on a

- $\Phi([\sqrt{\lambda}, +\infty[) \subset [\sqrt{\lambda}, +\infty[$,
- Φ est contractante sur $[\sqrt{\lambda}, +\infty[$ (et donc continue)

D'après le théorème du point fixe dans $\mathbb{R}$ pour une application contractante (Théorème 1.3, [?]), Φ admet un unique point fixe α dans $[\sqrt{\lambda}, +\infty[$, et la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers α pour tout choix de $x_0 \in [\sqrt{\lambda}, +\infty[$.
Or, on a $\Phi(\sqrt{\lambda}) = \sqrt{\lambda}$ et $\sqrt{\lambda} \in [\sqrt{\lambda}, +\infty[$, et donc $\alpha = \sqrt{\lambda}$.

Q. 4

Soit $x_0 \in [\sqrt{\lambda}, +\infty[$. on note $e_k = x_k - \sqrt{\lambda}$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

a. *Montrer que*

$$e_{k+1} = \frac{e_k^2}{2x_k}. \tag{9.1}$$

b. *En déduire l'ordre de convergence de la suite (en justifiant!)*

R. 4

a. On a

$$\begin{aligned} e_{k+1} = x_{k+1} - \sqrt{\lambda} &= \Phi(x_k) - \sqrt{\lambda} \\ &= \frac{x_k^2 + \lambda}{2x_k} - \sqrt{\lambda} = \frac{x_k^2 - 2x_k\sqrt{\lambda} + \lambda}{2x_k} \\ &= \frac{(x_k - \sqrt{\lambda})^2}{2x_k} = \frac{(e_k)^2}{2x_k}. \end{aligned}$$

b. On a $x_k \geqslant \sqrt{\lambda}$ et donc $\frac{1}{x_k} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$. On a donc

$$|e_{k+1}| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}|e_{k+1}|^2.$$

La méthode est donc d'ordre 2.

Q. 5

Que peut-on dire de la suite $(x_k)_{k\geq 1}$, si $x_0 \in]0, \sqrt{\lambda}[$? Justifier.

R. 5

Si $x_0 \in]0, \sqrt{\lambda}[$, alors $x_1 \in [\sqrt{\lambda}, +\infty[$.
On note $y_0 = x_1 \in [\sqrt{\lambda}, +\infty[$, et $y_{k+1} = \Phi(y_k)$, $\forall k \in \mathbb{N}$. D'après ce qui précède, la suite $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{\lambda}$ à l'ordre 2. Or, par construction $x_{k+1} = y_k$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$. La suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge donc aussi vers $\sqrt{\lambda}$ à l'ordre 2.

Exercice 10

Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach et $U \subset \mathcal{B}$ un sous-ensemble fermé. On suppose que $\boldsymbol{\Phi} : U \longrightarrow U$ est une application contractante. Soit $\boldsymbol{x}^{[0]} \in U$. On note $(\boldsymbol{x}^{[k]})_{k\in\mathbb{N}}$, la suite récurrente donnée par

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \boldsymbol{x}^{[k+1]} = \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}^{[k]}). \tag{10.1}$$

Q. 1

Montrer que la suite (10.1) *est bien définie (x_k existe pour tout $k \in \mathbb{N}$).*

R. 1

La suite $(\boldsymbol{x}^{[k]})_{k\in\mathbb{N}}$, est bien définie si la relation (10.1) permet de définir complètement (et de manière unique) l'ensemble des termes de la suite $(\boldsymbol{x}^{[k]})_{k\in\mathbb{N}}$, connaissant $\boldsymbol{x}^{[0]}$.
Il faut donc vérifier que, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{x}^{[k]} \in U$, car il faut pouvoir calculer $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}^{[k]})$ et que $\boldsymbol{\Phi}$ est définie sur U.
C'est bien sur immédiat par récurrence car $\boldsymbol{\Phi}(U) \subset U$. On propose toutefois une démonstration:

- Initialisation: pour $k = 0$. Par hypothèse, $\boldsymbol{x}^{[0]} \in U$.
- Hérédité: on suppose $\boldsymbol{x}^{[k]} \in U$, montrons que $\boldsymbol{x}^{[k+1]} \in U$. Par définition, $\boldsymbol{x}^{[k+1]} = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}^{[k]})$. Puisque par hypothèse, $\boldsymbol{\Phi}(U) \subset U$, on a $\boldsymbol{x}^{[k+1]} \in U$.

On va démontrer que la suite (10.1) est une suite de Cauchy.

Q. 2

a. *Montrer que*
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \left\|\boldsymbol{x}^{[k+1]} - \boldsymbol{x}^{[k]}\right\| \leqslant L^k \left\|\boldsymbol{x}^{[1]} - \boldsymbol{x}^{[0]}\right\|. \tag{10.2}$$

b. *Montrer que*
$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall l \geqslant 0, \quad \|x_{k+l} - x_{k+l-1}\| \leqslant L^l \left\|\boldsymbol{x}^{[k]} - \boldsymbol{x}^{[k-1]}\right\|. \tag{10.3}$$

c. *En déduire que,*
$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall p \geqslant 2, \quad \left\|\boldsymbol{x}^{[k+p]} - \boldsymbol{x}^{[k]}\right\| \leqslant \frac{1-L^p}{1-L} L^k \left\|\boldsymbol{x}^{[1]} - \boldsymbol{x}^{[0]}\right\|. \tag{10.4}$$

R. 2

a. La fonction $\boldsymbol{\Phi}$ étant contractante sur U, on a, par définition:

$$\exists L \in [0,1[\ \text{ t.q } \ \forall (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in U^2, \quad \|\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{y})\| \leqslant L \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|.$$

On obtient alors
$$\left\|\boldsymbol{x}^{[k+1]} - \boldsymbol{x}^{[k]}\right\| = \left\|\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}^{[k]}) - \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}^{[k-1]})\right\| \leqslant L \left\|\boldsymbol{x}^{[k]} - \boldsymbol{x}^{[k-1]}\right\|.$$

Par récurrence, on en déduit que la proposition suivante est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$(\mathcal{P}_k) : \quad \left\|\boldsymbol{x}^{[k+1]} - \boldsymbol{x}^{[k]}\right\| \leqslant L^k \left\|\boldsymbol{x}^{[1]} - \boldsymbol{x}^{[0]}\right\|.$$

On propose toutefois une démonstration:

- Initialisation: $(\mathcal{P}_0)$ est trivialement vraie.
- Hérédité: soit $k \in \mathbb{N}$, on suppose que $(\mathcal{P}_k)$ est vérifiée. Montrons que $(\mathcal{P}_{k+1})$ est vraie. On a, en utilisant (10.1) et l'hypothèse de contraction sur $\boldsymbol{\Phi}$,

$$\left\|\boldsymbol{x}^{[k+2]} - \boldsymbol{x}^{[k+1]}\right\| = \left\|\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}^{[k+1]}) - \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}^{[k]})\right\| \leqslant L \left\|\boldsymbol{x}^{[k+1]} - \boldsymbol{x}^{[k]}\right\|.$$

Par hypothèse de récurrence, on en déduit

$$\left\|\boldsymbol{x}^{[k+2]} - \boldsymbol{x}^{[k+1]}\right\| \leqslant L L^k \left\|\boldsymbol{x}^{[1]} - \boldsymbol{x}^{[0]}\right\|$$

et donc $(\mathcal{P}_{k+1})$ est vraie.

b. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $p \geqslant 2$. On a

$$\begin{aligned}
\left\|\boldsymbol{x}^{[k+p]} - \boldsymbol{x}^{[k]}\right\| &= \left\|(\boldsymbol{x}^{[k+p]} - \boldsymbol{x}^{[k+p-1]}) + (\boldsymbol{x}^{[k+p-1]} - \boldsymbol{x}^{[k+p-2]}) + \ldots + (\boldsymbol{x}^{[k+1]} - \boldsymbol{x}^{[k]})\right\| \\
&= \left\|\sum_{l=0}^{p-1} (\boldsymbol{x}^{[k+l+1]} - \boldsymbol{x}^{[k+l]})\right\|.
\end{aligned}$$

Par application répétée de l'inégalité triangulaire pour la norme $\|\bullet\|$, on obtient

$$\left\|\boldsymbol{x}^{[k+p]} - \boldsymbol{x}^{[k]}\right\| \leqslant \sum_{l=0}^{p-1} \left\|\boldsymbol{x}^{[k+l+1]} - \boldsymbol{x}^{[k+l]}\right\|$$

En utilisant (10.3), on obtient alors

$$\left\|\boldsymbol{x}^{[k+p]} - \boldsymbol{x}^{[k]}\right\| \leqslant \sum_{l=0}^{p-1} L^l \left\|\boldsymbol{x}^{[k+1]} - \boldsymbol{x}^{[k]}\right\| = \left\|\boldsymbol{x}^{[k+1]} - \boldsymbol{x}^{[k]}\right\| \sum_{l=0}^{p-1} L^l.$$

La somme correspond alors à une somme partielle d'une série géométrique et donc

$$\left\|\boldsymbol{x}^{[k+p]} - \boldsymbol{x}^{[k]}\right\| \leqslant \frac{1-L^p}{1-L} \left\|\boldsymbol{x}^{[k+1]} - \boldsymbol{x}^{[k]}\right\|.$$

En utilisant (10.2), on obtient alors (10.4).

Q. 3

a. Déduire de la question précédente que la suite (10.1) *est une suite de Cauchy.*

b. Montrer que la suite (10.1) *converge vers un point fixe de* Φ *à l'ordre* 1 *au moins.*

c. Montrer l'unicité du point fixe.

R. 3

a. On a $0 \leqslant L < 1$, et donc $L^k \to 0$ quand $k \to +\infty$. De (10.4), on déduit alors que $(\boldsymbol{x}^{[k]})$ est une suite de Cauchy.
On propose toutefois une démonstration détaillée.
Pour que $(\boldsymbol{x}^{[k]})$ soit une suite de Cauchy, il faut montrer que

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{N},\ \text{tel que } \forall k \in \mathbb{N},\ k \geqslant M,\ \forall p \in \mathbb{N},\ \left\|\boldsymbol{x}^{[k+p]} - \boldsymbol{x}^{[k]}\right\| < \epsilon.$$

Comme $0 < L < 1$, on a

$$\left\|\boldsymbol{x}^{[k+p]} - \boldsymbol{x}^{[k]}\right\| \leqslant \frac{1}{1-L} L^k \left\|\boldsymbol{x}^{[1]} - \boldsymbol{x}^{[0]}\right\|$$

Soit $\epsilon > 0$, pour avoir $\left\|\boldsymbol{x}^{[k+p]} - \boldsymbol{x}^{[k]}\right\| < \epsilon$, il est suffisant d'avoir

$$\frac{1}{1-L} L^k \left\|\boldsymbol{x}^{[1]} - \boldsymbol{x}^{[0]}\right\| < \epsilon$$

c'est à dire, comme $1 - L > 0$,

$$L^k < \frac{(1-L)\epsilon}{\left\|\boldsymbol{x}^{[1]} - \boldsymbol{x}^{[0]}\right\|}.$$

La fonction ln étant croissante strictement on obtient

$$\ln(L^k) = k\ln(L) < \ln\Big(\frac{(1-L)\epsilon}{\left\|\boldsymbol{x}^{[1]} - \boldsymbol{x}^{[0]}\right\|}\Big).$$

Or $\ln(L) < 0$, ce qui donne

$$k > \frac{1}{\ln(L)} \ln\Big(\frac{(1-L)\epsilon}{\left\|\boldsymbol{x}^{[1]} - \boldsymbol{x}^{[0]}\right\|}\Big).$$

En prenant $M \in \mathbb{N}$ tel que

$$M > \frac{1}{\ln(L)} \ln\Big(\frac{(1-L)\epsilon}{\left\|\boldsymbol{x}^{[1]} - \boldsymbol{x}^{[0]}\right\|}\Big)$$

alors

$$\forall k \in \mathbb{N},\ k \geqslant M,\ \forall p \in \mathbb{N},\ \left\|\boldsymbol{x}^{[k+p]} - \boldsymbol{x}^{[k]}\right\| < \epsilon.$$

b. La suite $(\boldsymbol{x}^{[k]})$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{B}$ un espace de Banach (espace normé complet) donc elle converge dans $\mathcal{B}$ vers un point que l'on nomme $\boldsymbol{\beta}$. De plus pour tout k, $\boldsymbol{x}^{[k]}$ appartient à U fermé, donc sa limite $\boldsymbol{\beta}$ appartient aussi à U.

La fonction $\boldsymbol{\Phi}$ étant contractante sur U, elle est donc continue sur U. On a alors par continuité de $\boldsymbol{\Phi}$

$$\lim_{k\to+\infty} \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}^{[k]}) = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\beta}).$$

Comme $\boldsymbol{x}^{[k+1]} = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}^{[k]})$ on aussi

$$\lim_{k\to+\infty} \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}^{[k]}) = \lim_{k\to+\infty} \boldsymbol{x}^{[k+1]} = \boldsymbol{\beta}$$

et donc $\boldsymbol{\beta}$ est un point fixe de $\boldsymbol{\Phi}$. L'existence d'un point fixe est donc établi.

On a donc

$$\left\|\boldsymbol{x}^{[k+1]} - \boldsymbol{\beta}\right\| = \left\|\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}^{[k]}) - \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\beta})\right\| \leqslant L \left\|\boldsymbol{x}^{[k]}) - \boldsymbol{\beta}\right\|.$$

Comme $0 \leqslant L < 1$, la convergence est au moins d'ordre 1.

c. On suppose qu'il existe $\boldsymbol{\beta}_1$ et $\boldsymbol{\beta}_2$ dans $[a, b]$ tels que $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\beta}_1) = \boldsymbol{\beta}_1$ et $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\beta}_2) = \boldsymbol{\beta}_2$. Dans ce cas on a

$$\|\boldsymbol{\beta}_1 - \boldsymbol{\beta}_2\| = \|\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\beta}_1) - \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\beta}_2)\| \leqslant L \|\boldsymbol{\beta}_1 - \boldsymbol{\beta}_2\|.$$

On en déduit

$$(1 - L) \|\boldsymbol{\beta}_1 - \boldsymbol{\beta}_2\| \leqslant 0$$

Comme $1 - L > 0$, on en déduit $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\beta}_2$, c'est à dire l'unicité du point fixe.