Partiel du 15 novembre 2024*

durée : 3h00.

Sans documents et sans appareils électroniques

Le barème est donné à titre indicatif

Dans ce sujet:

- Les trois exercices sont indépendants.
- Les entrées/sorties des fonctions algorithmiques que vous écrirez devront être décrites.
- Le but de toute fonction algorithmique que vous écrirez, et qui n'est pas explicitement demandée, devra être précisé.

Exercice 1 (3.0 points)

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note

$$\|\mathbb{A}\|_1 \stackrel{\mathsf{def}}{=} \sup_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n\\ \boldsymbol{x}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{x}\|_1}{\|\boldsymbol{x}\|_1} = \sup_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n\\ \|\boldsymbol{x}\|_1=1}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{x}\|_1$$

la norme matricielle suboordonnée à la norme vectorielle $\|\bullet\|_1$.

Q. 1

Montrer que

$$\sup_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n\\ \|\boldsymbol{x}\|_1=1}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{x}\|_1 \leqslant \max_{j\in[\![1,n]\!]} \sum_{i=1}^{n} |A_{i,j}|.$$

Q. 2

a. *Déterminer un* $\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$, $\|\boldsymbol{y}\|_1 = 1$ *tel que*

$$\|\mathbb{A}\boldsymbol{y}\|_1 = \max_{j\in[\![1,n]\!]} \sum_{i=1}^{n} |A_{i,j}|.$$

b. *Conclure.*

Q. 3

`[Algo]` *Ecrire une fonction algorithmique, nommée* **`Norm1`**, *calculant* $\|\mathbb{A}\|_1$.

Exercice 2 (7.25 points)

Soient $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. On définit la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par

$$x_{k+1} = \phi(x_k), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

*Compilé le 2025/09/04 à 10:45:48.

Q. 1

`[Algo]` *Ecrire une fonction algorithmique* **`PtFixe`** *retournant l'ensemble des itérés* x_k, *pour* $k \in [\![1, k_{\max}]\!]$ *où* $k_{\max}$ *est un entier.*

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $I =]\alpha_-, \alpha_+[$ un voisinage de α. On suppose que $\phi \in \mathcal{C}^1(I)$ et que α est un point fixe de ϕ vérifiant

$$|\phi'(\alpha)| < 1.$$

Q. 2

a. *Montrer qu'il existe* $\delta > 0$ *tel que pour tout* $x \in \mathcal{V} = [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$, $|\phi'(x)| < 1$.

b. *Montrer que* ϕ *est contractante sur* $\mathcal{V}$

c. *Montrer que* $\phi(\mathcal{V}) \subset \mathcal{V}$.

d. *Citer précisemment le théorème du cours qui, à partir de* Q. 2-**b.** *et* **c.**, *permet de déduire la convergence de l'algorithme du point fixe vers* α *au moins à l'ordre 1.*

Soient $x_0 \in \mathcal{V}$ et la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par l'algorithme du point fixe.

Q. 3

Montrer que, si $x_0 \in \mathcal{V} \backslash \{\alpha\}$, *alors*

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{x_k - \alpha} = \phi'(\alpha). \tag{1}$$

Q. 4

Supposons maintenant que $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$ *et que*

$$\forall i \in [\![1, p]\!], \quad \phi^{(i)}(\alpha) = 0.$$

a. *Montrer que la méthode du point fixe est d'ordre* $p + 1$ *au moins.*

b. *Montrer que, si* $x_0 \in \mathcal{V} \backslash \{\alpha\}$, *alors*

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{(x_k - \alpha)^{p+1}} = \frac{\phi^{(p+1)}(\alpha)}{(p+1)!}. \tag{2}$$

c. *Que peut-on dire sur l'ordre de convergence de la suite si* $\phi^{(p+1)}(\alpha) \neq 0$?

Application. Soit $\phi(x) = (x - 1)^3 + 1$.

Q. 5

a. *Déterminer les points fixes de* ϕ.

b. *Quels sont les points fixes attractifs et répulsifs? Justifier.*

c. *Pour un point attractif, déterminer un intervalle* J *(le plus grand possible) pour lequel, un théorème (à rappeler) permet d'affirmer que,* $\forall x_0 \in J$, *la suite* $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *converge vers ce point fixe.*

d. *Quel est l'ordre de convergence exacte? Justifer.*

Exercice 3 (10.25 **points**)

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne définie positive

Q. 1

a. *Démontrer que $\mathbb{A}$ est inversible.*

b. *Montrer que toutes les sous-matrices principales de $\mathbb{A}$ sont hermitiennes définies positives.*

c. *Ecrire précisemment le théorème de factorisation $\mathbb{LU}$. Que peut-on en conclure pour la matrice $\mathbb{A}$?*

On suppose (si besoin) que la matrice $\mathbb{A}$ admet une factorisation $\mathbb{A} = \mathbb{LDL}^*$ avec $\mathbb{L}$ une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité et $\mathbb{D}$ une matrice diagonale.

Q. 2

a. *Démontrer que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $D_{i,i}$ est réel strictement positif.*

b. *En déduire qu'il existe une matrice $\mathbb{B}$ triangulaire inférieure dont les éléments diagonaux sont **réels strictement négatifs** telle que*

$$\mathbb{A} = \mathbb{BB}^*. \tag{1}$$

Cette factorisation est appelée la factorisation négative de Cholesky*.*

c. *Démontrer l'unicité de la* factorisation négative de Cholesky*.*

d. *Soit $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n$ donné. Expliquer comment résoudre le système $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ à l'aide de la* factorisation négative de Cholesky*.*

Q. 3

a. *Montrer que*

$$B_{i,i} = -\left(A_{i,i} - \sum_{j=1}^{i-1} |B_{i,j}|^2\right)^{1/2}, \ \forall i \in [\![1, n]\!], \tag{2}$$

b. *Montrer que*

$$B_{j,i} = \frac{1}{B_{i,i}}\left(A_{j,i} - \sum_{k=1}^{i-1} B_{j,k}\overline{B_{i,k}}\right), \ \forall j \in [\![i+1, n]\!] \tag{3}$$

$$B_{j,i} = 0, \ \forall j \in [\![1, i-1]\!]. \tag{4}$$

c. *Expliquer rapidement comment calculer explicitement la matrice $\mathbb{B}$ à l'aide des formules précédentes.*

d. `[Algo]` *Ecrire la fonction algorithmique* **`FactCN`** *permettant de calculer la matrice $\mathbb{B}$*

On dispose des fonctions :

- $\boldsymbol{x} \leftarrow$ **`resTI`**$(\mathbb{L}, \boldsymbol{b})$ retournant $\boldsymbol{x}$, solution du système linéaire $\mathbb{L}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ avec $\mathbb{L} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire inférieure inversible et $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n$.
- $\mathbb{B} \leftarrow$ **`Adjoint`**$(\mathbb{M})$ retournant la matrice adjointe de $\mathbb{M} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$.

Q. 4

[Algo]

a. *Ecrire la fonction* **`resTS`** *retournant* $\boldsymbol{x}$, *solution de* $\mathbb{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ *où* $\mathbb{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *est une matrice triangulaire supérieure inversible et* $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n$.

b. *Ecrire la fonction algorithmique* **`resFactCN`** *retournant* $\boldsymbol{x}$, *solution de* $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ *en utilisant sa* factorisation négative de Cholesky.