Sup Galilée **Ing. Macs 1**
Année 2023-2024 **Analyse Numérique I**

Partiel du 10 janvier 2024

durée : 3h00.

Sans documents et sans appareils électroniques

Le barême est donné à titre indicatif

Dans ce sujet :

- Les trois exercices sont indépendants.
- Les entrées/sorties des fonctions algorithmiques que vous écrirez devront être décrites.
- Le but de toute fonction algorithmique que vous écrirez, et qui n'est pas explicitement demandée, devra être précisé.

Exercice 1 (5.5 points)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_i, y_i, z_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ $(n+1)$ triplets de $\mathbb{R}^3$, où les x_i sont des points distincts deux à deux de $\mathbb{R}$. Le **polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite**, noté H_n, associé aux $(n+1)$ triplets $(x_i, y_i, z_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$, est défini par

$$\mathrm{H}_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i A_i(x) + \sum_{i=0}^{n} z_i B_i(x) \tag{1.1}$$

avec

$$A_i(x) = \big(1 - 2(x - x_i)L_i'(x_i)\big)L_i^2(x) \quad \text{et} \quad B_i(x) = (x - x_i)L_i^2(x) \tag{1.2}$$

où

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Q. 1 ***a.*** *Quelles sont les propriétés remarquables du polynôme H_n ?*

b. *Calculer $L_i'(x)$.*

c. *En déduire que*

$$L_i'(x_i) = \sum_{\substack{k=0\\ k\neq i}}^{n} \frac{1}{x_i - x_k}.$$

□

Q. 2 [Algo] *Ecrire une fonction algorithmique* `Hermite` *permettant de calculer $\mathrm{H}_n(t)$ avec $t \in \mathbb{R}$.* □

Q. 3 [Algo] *Dans le but de valider/tester la fonction algorithmique* `Hermite`*, proposer un algorithme permettant de vérifier,* ***sans représentation graphique****, que cette fonction a les mêmes propriétés que le polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite. On rappelle que, pour $h \in \mathbb{R}$ suffisament petit, on a*

$$\mathrm{H}_n'(t) \approx \frac{\mathrm{H}_n(t+h) - \mathrm{H}_n(t)}{h}.$$

□

Exercice 2 (11.5 points)

Soient $f \in \mathcal{C}^4([0,2];\mathbb{R})$ et α, β, γ trois réels. Nous allons étudier la formule de quadrature

$$\int_0^2 f(x)\,dx \approx Q(f) \stackrel{\text{def}}{=} \gamma f(2) + \beta f(1) + \alpha f(0). \tag{2.1}$$

Q. 1 **a.** *Démontrer que la formule de quadrature (2.1) est de degré d'exactitude au moins p si et seulement si elle est exacte pour les $(p+1)$ fonctions $x \mapsto x^k$, $k \in [\![0,p]\!]$.*

b. *Déterminer α, β et γ pour que la formule de quadrature soit au moins de degré d'exactitude 2.*

c. *Montrer que cette formule est de degré d'exactitude 3.*

□

Q. 2 **a.** *Etablir qu'il existe un unique polynôme P de degré 3 tel que*

$$\mathrm{P}(0) = f(0), \quad \mathrm{P}(1) = f(1), \quad \mathrm{P}(2) = f(2) \text{ et } \mathrm{P}'(0) = f'(0). \tag{2.2}$$

b. *Soit $x \in]0,2[$ fixé, avec $x \neq 1$. On considère la fonction $\varphi : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par*

$$\varphi(t) = (f(t) - \mathrm{P}(t)) - (f(x) - \mathrm{P}(x))\frac{(t-1)(t-2)t^2}{(x-1)(x-2)x^2}, \ \forall t \in [0,2].$$

En quels points s'annule la fonction φ? En déduire, par applications successives du théorème de Rolle, qu'il existe un $\xi_x \in]0,2[$ tel que $\varphi^{(4)}(\xi_x) = 0$.

c. *En déduire que pour tout $x \in [0,2]$, il existe un $\xi_x \in]0,2[$ tel que*

$$f(x) = \mathrm{P}(x) + \frac{(x-1)(x-2)x^2}{4!} f^{(4)}(\xi_x). \tag{2.3}$$

□

Q. 3 *Soit P défini par (2.2)*

a. *Montrer (sans calcul) que*

$$\int_0^2 \mathrm{P}(x)dx = \gamma f(2) + \beta f(1) + \alpha f(0).$$

b. *En déduire qu'il existe une constante M dépendant de $f^{(4)}$ telle que*

$$\left| \int_0^2 f(x)dx - (\gamma f(2) + \beta f(1) + \alpha f(0)) \right| \leqslant \frac{1}{90} M. \tag{2.4}$$

□

Q. 4 *Soient $c \in \mathbb{R}$, $h > 0$ et $g \in \mathcal{C}^4([c, c+h];\mathbb{R})$.*

a. *Par un changement de variable, déduire de (2.1) une formule de quadrature pour le calcul approché de $\int_c^{c+h} g(t)dt$.*

b. *En utilisant (2.4), montrer que l'erreur de quadrature est majorée par $\frac{\mathcal{M}}{C} h^5$ où $\mathcal{M} = \sup_{t \in [c,c+h]} |g^{(4)}(t)|$ et $C > 0$.*

□

Q. 5 *Soient $(x_k)_{k=0}^n$ une discrétisation régulière de l'intervalle $[a,b]$ et $w \in \mathcal{C}^4([a,b];\mathbb{R})$.*

a. *A partir de (2.1), expliciter la formule **composite** associée permettant d'approcher $\int_a^b w(s)ds$ en utilisant la discrétisation $(x_k)_{k=0}^n$.*

b. *En utilisant les résultats de la question 4, montrer que l'erreur de quadrature de la formule composite est majorée par $D(b-a)h^4$ où $D = \frac{1}{C} \sup_{x \in [a,b]} |w^{(4)}(x)|$.*

$\square$

Exercice 3 (11.5 points)

Definition (uniquement pour l'exercice !). *Soit $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n$ tel que $u_i \neq 0$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$. On dit que $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admet une **factorisation** $\mathbb{W}\mathbb{U}$ **paramétrée par** $\boldsymbol{u}$ si il existe $\mathbb{W} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ **triangulaire inférieure inversible** et $\mathbb{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ **triangulaire supérieure de diagonale** $\boldsymbol{u}$ (i.e. $U_{i,i} = u_i$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$) telles que*

$$\mathbb{A} = \mathbb{W}\mathbb{U}.$$

Soit $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n$ tel que $u_i \neq 0$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$.
On note $\mathbb{A} = (A_{i,j})_{i,j=1}^n$, $\mathbb{W} = (W_{i,j})_{i,j=1}^n$ et $\mathbb{U} = (U_{i,j})_{i,j=1}^n$ les composantes de ces matrices.

Q. 1 *Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admettant une factorisation $\mathbb{W}\mathbb{U}$ paramétrée par $\boldsymbol{u}$.*

- ***a.*** *Rappeler la définition des sous-matrices principales de $\mathbb{A}$.*
- ***b.*** *Démontrer que toutes les sous-matrices principales de $\mathbb{A}$ sont inversibles. Indication : on pourra utiliser une décomposition par blocs des matrices.*
- ***c.*** *Démontrer que la factorisation $\mathbb{W}\mathbb{U}$ paramétrée par $\boldsymbol{u}$ est unique.*
- ***d.*** *Soit $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n$ donné. Expliquer comment résoudre le système $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ à l'aide de la factorisation $\mathbb{W}\mathbb{U}$ paramétrée par $\boldsymbol{u}$.*

$\square$

Q. 2 *Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admettant une factorisation $\mathbb{W}\mathbb{U}$ paramétrée par $\boldsymbol{u}$. Expliquer de manière détaillée une méthodologie pour calculer les coefficients des matrices $\mathbb{W}$ et $\mathbb{U}$. On explicitera les formules utilisées.* $\square$

Q. 3 [Algo] *Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admettant une factorisation $\mathbb{W}\mathbb{U}$ paramétrée par $\boldsymbol{u}$.*

- ***a.*** *Ecrire la fonction* ResTriSup *retournant $\boldsymbol{x}$, solution de $\mathbb{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ où $\mathbb{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une matrice triangulaire supérieure inversible et $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n$.*
- ***b.*** *Ecrire la fonction algorithmique* FactWU *retournant les matrices $\mathbb{W}$ et $\mathbb{U}$.*
- ***c.*** *On suppose la fonction* ResTriInf *retournant $\boldsymbol{x}$, solution de $\mathbb{L}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ avec $\mathbb{L} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire inférieure inversible, déjà écrite. Ecrire la fonction algorithmique* ResWU *retournant $\boldsymbol{x}$, solution de $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ en utilisant sa factorisation $\mathbb{W}\mathbb{U}$ paramétrée par $\boldsymbol{u}$.*

$\square$

Q. 4 *Nous allons démontrer par récurrence sur l'ordre $n \geqslant 2$ des matrices que si $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une matrice dont toutes les sous-matrices principales sont inversibles, alors elle admet une factorisation $\mathbb{W}\mathbb{U}$ paramétrée par $\boldsymbol{u}$.*

- ***a.*** *Ecrire proprement la proposition $(\mathcal{P}_n)$ à démontrer par récurrence.*
- ***b.*** ***Initialisation :*** *montrer que $(\mathcal{P}_2)$ est vraie.*
- ***c.*** ***Hérédité :*** *en supposant que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie montrer que $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vérifiée (on pourra utiliser une décomposition bloc)*
- ***d.*** *Conclure*

$\square$