Partiel du 8 janvier 2025*

durée : 3h00.

Sans documents et sans appareils électroniques

Le barême est donné à titre indicatif

Dans ce sujet:

- Les trois exercices sont indépendants.
- Les entrées/sorties des fonctions algorithmiques que vous écrirez devront être décrites.
- Le but de toute fonction algorithmique que vous écrirez, et qui n'est pas explicitement demandée, devra être précisé.

Exercice 1 (8.75 points)

Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible dont les éléments diagonaux sont non nuls, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{K}^n$ et $\underline{\boldsymbol{x}} = \mathbb{A}^{-1}\boldsymbol{b}$.
On rappelle que si $\mathbb{G} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors

$$\left(\forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}, \lim_{k\to\infty} \mathbb{G}^k \boldsymbol{v} = 0\right) \iff \rho(\mathbb{G}) < 1. \tag{1}$$

Q. 1

On décompose $\mathbb{A}$ sous la forme $\mathbb{A} = \mathbb{M} - \mathbb{N}$ avec $\mathbb{M}$ inversible et on pose

$$\mathbb{B} = \mathbb{M}^{-1}\mathbb{N} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{c} = \mathbb{M}^{-1}\boldsymbol{b}.$$

On définit la suite $(\boldsymbol{x}^{[k]})_{k\in\mathbb{N}}$ par

$$\boldsymbol{x}^{[0]} \in \mathbb{K}^n \quad \text{et} \quad \boldsymbol{x}^{[k+1]} = \mathbb{B}\boldsymbol{x}^{[k]} + \boldsymbol{c}. \tag{2}$$

a. *Rappeler la définition de $\rho(\mathbb{B})$, rayon spectral de la matrice $\mathbb{B}$.*

b. *Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$*

$$\underline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}^{[k+1]} = \mathbb{B}(\underline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}^{[k]}).$$

c. *En déduire que la suite $(\boldsymbol{x}^{[k]})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\underline{\boldsymbol{x}}$ quelque soit $\boldsymbol{x}^{[0]}$ si et seulement si $\rho(\mathbb{B}) < 1$.*

On décompose la matrice $\mathbb{A}$ sous la forme $\mathbb{A} = \mathbb{D} - \mathbb{E} - \mathbb{F}$, où $\mathbb{D}$ représente la diagonale de $\mathbb{A}$, $-\mathbb{E}$ la partie triangulaire inférieure stricte et $-\mathbb{F}$ la partie triangulaire supérieure stricte.
La méthode S.O.R. (successive over relaxation) est donnée par

$$x_i^{[k+1]} = \frac{w}{\mathrm{A}_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} \mathrm{A}_{ij} x_j^{[k+1]} - \sum_{j=i+1}^{n} \mathrm{A}_{ij} x_j^{[k]}\right) + (1-w)x_i^{[k]}, \quad \forall i \in [\![1, n]\!] \tag{3}$$

*Compilé le 2025/09/04 à 10:54:45.

Q. 2

a. *Montrer que* (3) *s'écrit vectoriellement sous la forme*

$$\boldsymbol{x}^{[k+1]} = \mathbb{B}_w \boldsymbol{x}^{[k]} + \boldsymbol{c}$$

où l'on explicitera la matrice $\mathbb{B}_w$ *et le vecteur* $\boldsymbol{c}$ *en fonction de* $\mathbb{D}$, $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$, *et* $\boldsymbol{b}$.

b. *En utilisant les résultats de Q.1, démontrer que la suite* $\boldsymbol{x}^{[k]}$ *converge vers* $\underline{\boldsymbol{x}}$ *si et seulement si* $\rho(\mathbb{B}_w) < 1$.

c. *Soient* $\mathbb{L} = \mathbb{D}^{-1}\mathbb{E}$ *et* $\mathbb{U} = \mathbb{D}^{-1}\mathbb{F}$. *Montrer que*

$$\mathbb{B}_w = (\mathbb{I} - w\mathbb{L})^{-1}\left((1-w)\mathbb{I} + w\mathbb{U}\right).$$

d. *En déduire que*

$$\rho(\mathbb{B}_w) \geqslant |w-1|. \tag{4}$$

e. *Que peut-on en déduire sur la convergence de la méthode S.O.R?*

A l'itération k, on note le résidu par $\boldsymbol{r}^{[k]} = \boldsymbol{b} - \mathbb{A}\boldsymbol{x}^{[k]}$ et, l'erreur par $\boldsymbol{e}^{[k]} = \overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}^{[k]}$ où $\overline{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n$ est la solution de $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Q. 3

a. *Soit* $\varepsilon > 0$. *Montrer que si* $\left\|\boldsymbol{r}^{[k]}\right\| \leqslant \varepsilon \max(\|\boldsymbol{b}\|, 1)$ *(critère d'arrêt de convergence) alors, il existe* $C > 0$, *indépendant de* ε, *tel que*

$$\left\|\boldsymbol{e}^{[k]}\right\| \leqslant C\varepsilon \max(\|\boldsymbol{b}\|, 1)$$

b. `[Algo]` *Ecrire une fonction* `SOR`*, utilisant* (3), *et permettant de retourner:*

- *le premier vecteur* $\boldsymbol{x}^{[k]}$ *vérifiant le critère d'arrêt de convergence ou le dernier vecteur* $\boldsymbol{x}^{[k_{\max}]}$ *sinon (* $k_{\max}$ *étant le nombre maximal d'itérations),*
- k, *le nombre d'itération si convergence et* $-k_{\max}$ *sinon.*

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$. On définit la matrice $\mathbb{A}_\alpha$ par

$$\mathbb{A}_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \alpha \\ 0 & 2 & 0 \\ \alpha & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On note respectivement $\mathbb{J} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{D}^{-1}(\mathbb{E}+\mathbb{F})$ et $\mathcal{L}_1 \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1}\mathbb{F}$ les matrices d'itérations des méthodes itératives de Jacobi et de Gauss-Seidel.

Q. 4

a. *Etudier la convergence de la méthode de Jacobi pour la résolution de* $\mathbb{A}_\alpha\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

b. *Etudier la convergence de la méthode de Gauss-Seidel pour la résolution de* $\mathbb{A}_\alpha\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

EXERCICE 2 (5.5 points)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(n+1)$ couples de $\mathbb{R}^2$, $(x_i, y_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$, tels que les x_i sont distincts deux à deux. On note

Q. 1

a. *Soit $i \in [\![0,n]\!]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme L_i de degré n, que l'on explicitera, et vérifiant*

$$L_i(x_j) = \delta_{ij}, \ \forall j \in [\![0,n]\!]. \tag{1}$$

b. *Montrer que les $(L_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$ (espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n).*

On définit le polynôme P_n par

$$\mathrm{P}_n(t) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(t). \tag{2}$$

Q. 2

a. *Montrer que le polynôme P_n est l'unique polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant*

$$\forall i \in [\![0,n]\!], \ \mathrm{P}_n(x_i) = y_i. \tag{3}$$

b. `[Algo]` *Ecrire une fonction algorithmique, nommée* `Lagrange`, *retournant $\mathrm{P}_n(t)$ avec $t \in \mathbb{R}$ donné.*

Soit $k \in [\![0,n]\!]$, on note par P_k l'unique polynôme de $\mathbb{R}_k[X]$ vérifiant $\mathrm{P}_k(x_i) = y_i$, $\forall i \in [\![0,k]\!]$, et par π_k le polynôme

$$\pi_k(t) = \prod_{i=0}^{k} (t - x_i).$$

On va établir une formule de récurrence permettant de déterminer P_k à partir de P_{k-1}.

Q. 3

En effectuant la division euclidienne du polynôme P_k par le polynôme π_{k-1} on a

$$\mathrm{P}_k = \mathrm{R}_{k-1} + \mathrm{Q}_{k-1}\pi_{k-1} \tag{4}$$

avec $\mathrm{R}_{k-1} \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$ et $\mathrm{Q}_{k-1} \in \mathbb{R}_0[X]$.

a. *Démontrer que $\mathrm{R}_{k-1} = \mathrm{P}_{k-1}$.*

b. *En déduire que*

$$\mathrm{Q}_{k-1} = \frac{y_k - \mathrm{P}_{k-1}(x_k)}{\pi_{k-1}(x_k)}.$$

c. *Déterminer P_0.*

d. `[Algo]` *Proposer une fonction algorithmique récursive, nommée* `LagrangeRec`, *permettant de calculer $\mathrm{P}_n(t)$ en utilisant la formule de récurrence (4).*

Q. 4 Application

Soient $A = (0,-2)$, $B = (1,1)$ et $C = (2,6)$. On cherche à expliciter le polynôme d'interpolation de Lagrange, noté P, passant par les points A, B et C.

a. *Sans utiliser la formule de récurrrence (4), déterminer P en détaillant les calculs.*

b. *En utilisant la formule de récurrence (4), détailler les calculs permettant d'obtenir P.*

Exercice 3 (6.25 **points**)

Soient f une fonction définie sur $[-1,1]$ à valeurs réelles et $n \in \mathbb{N}$. On souhaite approcher $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ par $\mathcal{Q}_n(f)$ une formule de quadrature élémentaire

$$\mathcal{Q}_n(f) \stackrel{\text{def}}{=} 2\sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) \tag{1}$$

où les $(x_i)_{i=0}^n$ sont des points distincts 2 à 2 dans $[-1,1]$ et les $(w_i)_{i=0}^n$ sont des réels.

Q. 1

a. *Démontrer que l'application* $\mathcal{Q}_n$ *définie de* $\mathcal{C}^0([-1,1];\mathbb{R})$, *muni de la norme infinie, à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *est linéaire et continue.*

b. *Soit* $k \in \mathbb{N}$. *Montrer que* $\mathcal{Q}_n$ *est de degré d'exactitude* k *au moins si et seulement si*

$$\forall r \in [\![0,k]\!], \quad \mathcal{Q}_n(x \mapsto x^r) = \int_{-1}^{1} x^r dx. \tag{2}$$

On note $(t_i)_{i=0}^{n+1}$ les points de la discrétisation régulière de l'intervalle $[-1,1]$ en $(n+2)$ points et, pour $i \in [\![0,n]\!]$, x_i le point milieu de l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$.

Q. 2

a. *Expliciter* t_i *et* x_i *en fonction de* i *et* n.

b. *Soit* $k \in \mathbb{N}$. *Montrer que* $\mathcal{Q}_n$ *est de degré d'exactitude* k *au moins si et seulement si*

$$\forall r \in [\![0,k]\!], \quad \sum_{i=0}^{n} w_i x_i^r = \begin{cases} 0 & \textit{si } r \textit{ est impaire} \\ \frac{1}{r+1} & \textit{sinon} \end{cases} \tag{3}$$

c. *Montrer que* (3) *peut s'écrire sous la forme d'un système linéaire* $\mathbb{A}\boldsymbol{W} = \boldsymbol{b}$ *avec* $\boldsymbol{W} = (w_0, \dots, w_n)^t \in \mathbb{R}^{n+1}$ *où l'on explicitera* $\mathbb{A}$ *et* $\boldsymbol{b}$ *en précisant leurs dimensions.*

d. *En déduire qu'avec le choix des points* $(x_i)_{i=0}^n$, *il existe une unique formule de quadrature de degré d'exactitude* n *au moins.*

On dispose des fonctions algorithmiques:

- $\boldsymbol{x} \leftarrow \text{Solve}(\mathbb{A}, \boldsymbol{b})$ résolvant le système linéaire $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ avec $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible et $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$,
- $z \leftarrow \text{Power}(x, y)$ retournant x^y avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Q. 3 [Algo]

a. *Ecrire une fonction algorithmique, nommée* `MidPoints`, *retournant l'ensemble des* $(x_i)_{i=0}^n$ *et des* $(w_i)_{i=0}^n$ *tels que* $\mathcal{Q}_n$ *soit de degré d'exactitude* n *au moins.*

b. *Ecrire une fonction algorithmique, nommée* `QuadElemMidPoints`, *retournant* $\mathcal{Q}_n(f)$ *avec* $f \in \mathcal{C}^0([-1,1];\mathbb{R})$.

Q. 4 Application

On fixe $n = 2$.

a. *Déterminer explicitement les points* $(x_i)_{i=0}^2$ *et les poids* $(w_i)_{i=0}^2$ *de tel sorte que* $\mathcal{Q}_2$ *soit de degré d'exactitude* 2 *au moins.*

b. *Déterminer le degré d'exactitude maximal de* $\mathcal{Q}_2$.