

PARTIEL DU 8 JANVIER 2025*
durée : 3h00.

Sans documents et sans appareils électroniques
Le barème est donné à titre indicatif

Dans ce sujet:

- Les trois exercices sont indépendants.
- Les entrées/sorties des fonctions algorithmiques que vous écrirez devront être décrites.
- Le but de toute fonction algorithmique que vous écrirez, et qui n'est pas explicitement demandée, devra être précisé.

EXERCICE 1 (0.0 points)

Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible dont les éléments diagonaux sont non nuls, $\mathbf{b} \in \mathbb{K}^n$ et $\mathbf{x} = \mathbb{A}^{-1}\mathbf{b}$.
On rappelle que si $\mathbb{G} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors

$$(\forall \mathbf{v} \in \mathbb{K}, \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{G}^k \mathbf{v} = \mathbf{0}) \iff \rho(\mathbb{G}) < 1. \quad (1)$$

Q. 1

On décompose $\mathbb{A}$ sous la forme $\mathbb{A} = \mathbb{M} - \mathbb{N}$ avec $\mathbb{M}$ inversible et on pose

$$\mathbb{B} = \mathbb{M}^{-1}\mathbb{N} \quad \text{et} \quad \mathbf{c} = \mathbb{M}^{-1}\mathbf{b}.$$

On définit la suite $(\mathbf{x}^{[k]})_{k \in \mathbb{N}}$ par

$$\mathbf{x}^{[0]} \in \mathbb{K}^n \quad \text{et} \quad \mathbf{x}^{[k+1]} = \mathbb{B}\mathbf{x}^{[k]} + \mathbf{c}. \quad (2)$$

a. Rappeler la définition de $\rho(\mathbb{B})$, rayon spectral de la matrice $\mathbb{B}$.

b. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}^{[k+1]} = \mathbb{B}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{[k]}).$$

c. En déduire que la suite $(\mathbf{x}^{[k]})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $\mathbf{x}$ quelque soit $\mathbf{x}^{[0]}$ si et seulement si $\rho(\mathbb{B}) < 1$.

R. 1

a. Le **rayon spectral** d'une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est le nombre ≥ 0 défini par

$$\rho(\mathbb{A}) = \max \{ |\lambda_i(\mathbb{A})| ; i \in \llbracket 1, n \rrbracket \}$$

Les $\lambda_i(\mathbb{A}) \in \mathbb{C}$ sont les n valeurs propres distinctes ou non de la matrice $\mathbb{A}$.

b. Comme $\mathbf{x} = \mathbb{A}^{-1}\mathbf{b}$ (sans présupposer la convergence) on a $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Comme $\mathbb{A} = \mathbb{M} - \mathbb{N}$, on a $\mathbb{M}\mathbf{x} = \mathbb{N}\mathbf{x} + \mathbf{b}$ et alors

$$\mathbf{x} = \mathbb{M}^{-1}\mathbb{N}\mathbf{x} + \mathbb{M}^{-1}\mathbf{b} = \mathbb{B}\mathbf{x} + \mathbf{c}$$

On obtient donc

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}^{[k+1]} = \mathbb{B}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{[k]}).$$

c. La suite $\mathbf{x}^{[k]}$ converge vers $\mathbf{x}$ si et seulement si la suite $\mathbf{e}^{[k]} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x} - \mathbf{x}^{[k]}$ converge vers $\mathbf{0}$. On a

$$\mathbf{e}^{[k]} = \mathbb{B}^k \mathbf{e}^{[0]}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

D'après le Théorème (3.37 page 105) du cours, on a $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{B}^k \mathbf{e}^{[0]} = \mathbf{0}, \forall \mathbf{e}^{[0]} \in \mathbb{K}^n$ si et seulement si $\rho(\mathbb{B}) < 1$.

On décompose la matrice $\mathbb{A}$ sous la forme $\mathbb{A} = \mathbb{D} - \mathbb{E} - \mathbb{F}$, où $\mathbb{D}$ représente la diagonale de $\mathbb{A}$, $-\mathbb{E}$ la partie triangulaire inférieure stricte et $-\mathbb{F}$ la partie triangulaire supérieure stricte.

La méthode S.O.R. (successive over relaxation) est donnée par

$$x_i^{[k+1]} = \frac{w}{A_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} x_j^{[k+1]} - \sum_{j=i+1}^n A_{ij} x_j^{[k]} \right) + (1-w)x_i^{[k]}, \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad (3)$$

Q. 2

a. Montrer que (3) s'écrit vectoriellement sous la forme

$$\mathbf{x}^{[k+1]} = \mathbb{B}_w \mathbf{x}^{[k]} + \mathbf{c}$$

où l'on explicitera la matrice $\mathbb{B}_w$ et le vecteur $\mathbf{c}$ en fonction de $\mathbb{D}$, $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$, et $\mathbf{b}$.

b. En utilisant les résultats de Q.1, démontrer que la suite $\mathbf{x}^{[k]}$ converge vers $\underline{\mathbf{x}}$ si et seulement si $\rho(\mathbb{B}_w) < 1$.

c. Soient $\mathbb{L} = \mathbb{D}^{-1}\mathbb{E}$ et $\mathbb{U} = \mathbb{D}^{-1}\mathbb{F}$. Montrer que

$$\mathbb{B}_w = (\mathbb{I} - w\mathbb{L})^{-1} ((1-w)\mathbb{I} + w\mathbb{U}).$$

d. En déduire que

$$\rho(\mathbb{B}_w) \geq |w-1|. \quad (4)$$

e. Que peut-on en déduire sur la convergence de la méthode S.O.R?

R. 2

a. Pour la **méthode S.O.R.** on a , $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$x_i^{[k+1]} = \frac{w}{A_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} x_j^{[k+1]} - \sum_{j=i+1}^n A_{ij} x_j^{[k]} \right) + (1-w)x_i^{[k]}$$

ce qui s'écrit aussi

$$\frac{A_{ii}}{w} x_i^{[k+1]} + \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} x_j^{[k+1]} = b_i - \sum_{j=i+1}^n A_{ij} x_j^{[k]} + \frac{1-w}{w} A_{ii} x_i^{[k]}$$

et matriciellement on obtient

$$\left(\frac{\mathbb{D}}{w} - \mathbb{E} \right) \mathbf{x}^{[k+1]} = \left(\frac{1-w}{w} \mathbb{D} + \mathbb{F} \right) \mathbf{x}^{[k]} + \mathbf{b}.$$

Comme la matrice $\left(\frac{\mathbb{D}}{w} - \mathbb{E} \right)$ est inversible (car triangulaire inférieure à éléments diagonaux non nuls), on a

$$\mathbf{x}^{[k+1]} = \left(\frac{\mathbb{D}}{w} - \mathbb{E} \right)^{-1} \left(\frac{1-w}{w} \mathbb{D} + \mathbb{F} \right) \mathbf{x}^{[k]} + \left(\frac{\mathbb{D}}{w} - \mathbb{E} \right)^{-1} \mathbf{b}$$

La matrice d'itération de S.O.R. est $\mathbb{B}_w = \left(\frac{\mathbb{D}}{w} - \mathbb{E} \right)^{-1} \left(\frac{1-w}{w} \mathbb{D} + \mathbb{F} \right)$ et le vecteur $\mathbf{c} = \left(\frac{\mathbb{D}}{w} - \mathbb{E} \right)^{-1} \mathbf{b}$.

b. En posant

$$\mathbb{M} = \frac{\mathbb{D}}{w} - \mathbb{E} \text{ et } \mathbb{N} = \frac{1-w}{w} \mathbb{D} + \mathbb{F}$$

on a $\mathbb{M}$ inversible et

$$\mathbb{M} - \mathbb{N} = \mathbb{D} - \mathbb{E} - \mathbb{F} = \mathbb{A}.$$

On est donc sous les hypothèses de Q.1, ce qui nous donne le résultat demandé.

c. Comme $\mathbb{E} = \mathbb{D}\mathbb{L}$ et $\mathbb{F} = \mathbb{D}\mathbb{U}$ on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{B}_w &= \left(\frac{\mathbb{D}}{w} - \mathbb{D}\mathbb{L} \right)^{-1} \left(\frac{1-w}{w} \mathbb{D} + \mathbb{D}\mathbb{U} \right) \\ &= \left(\frac{1}{w} \mathbb{D}[\mathbb{I} - w\mathbb{L}] \right)^{-1} \left(\frac{1}{w} \mathbb{D}[(1-w)\mathbb{I} + w\mathbb{U}] \right) \\ &= (\mathbb{I} - w\mathbb{L})^{-1} \left(\frac{1}{w} \mathbb{D} \right)^{-1} \left(\frac{1}{w} \mathbb{D} \right) ((1-w)\mathbb{I} + w\mathbb{U}) \\ &= (\mathbb{I} - w\mathbb{L})^{-1} ((1-w)\mathbb{I} + w\mathbb{U}).\end{aligned}$$

d. La matrice $\mathbb{L}$ est triangulaire inférieure à diagonale nulle car elle est le produit d'une matrice diagonale (et donc triangulaire inférieure) $\mathbb{D}^{-1}$ et d'une matrice triangulaire inférieure $\mathbb{E}$ à diagonale nulle. De même la matrice $\mathbb{U}$ est triangulaire supérieure à diagonale nulle.

On sait que le déterminant d'une matrice est égale aux produits de ses valeurs propres comptées avec leurs multiplicités. En notant n la dimension de la matrice $\mathbb{B}_w$, et en notant $\lambda_i(\mathbb{B}_w)$ ses n valeurs propres, on a donc

$$\det(\mathbb{B}_w) = \prod_{i=1}^n \lambda_i(\mathbb{B}_w).$$

Le rayon spectral de $\mathbb{B}_w$, noté $\rho(\mathbb{B}_w)$, correspond au plus grand des modules des valeurs propres. On a alors

$$\rho(\mathbb{B}_w) = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |\lambda_i(\mathbb{B}_w)| \geq |\det(\mathbb{B}_w)|^{1/n}$$

De plus on a

$$\det(\mathbb{B}_w) = \det \left((\mathbb{I} - w\mathbb{L})^{-1} ((1-w)\mathbb{I} + w\mathbb{U}) \right) = \det \left((\mathbb{I} - w\mathbb{L})^{-1} \right) \det ((1-w)\mathbb{I} + w\mathbb{U})$$

La matrice $\mathbb{I} - w\mathbb{L}$ est triangulaire inférieure à diagonale unité donc son inverse aussi. On en déduit $\det \left((\mathbb{I} - w\mathbb{L})^{-1} \right) = 1$. La matrice $(1-w)\mathbb{I} + w\mathbb{U}$ est triangulaire supérieure avec tous ses éléments diagonaux valant $1-w$ et donc $\det ((1-w)\mathbb{I} + w\mathbb{U}) = (1-w)^n$. On a alors $|\det(\mathbb{B}_w)| = |1-w|^n$ et

$$\rho(\mathbb{B}_w) \geq |\det(\mathbb{B}_w)|^{1/n} = |1-w|.$$

e. On a $\rho(\mathbb{B}_w) \geq 1$, si $w \in]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$. On en déduit que la méthode S.O.R. diverge si $w \notin]0, 2[$. Et donc, il est nécessaire (mais non suffisant) d'avoir $w \in]0, 2[$ pour espérer la convergence.

A l'itération k , on note le résidu par $\mathbf{r}^{[k]} = \mathbf{b} - \mathbb{A}\mathbf{x}^{[k]}$ et, l'erreur par $\mathbf{e}^{[k]} = \bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^{[k]}$ où $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ est la solution de $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Q. 3

a. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que si $\|\mathbf{r}^{[k]}\| \leq \varepsilon \max(\|\mathbf{b}\|, 1)$ (critère d'arrêt de convergence) alors, il existe $C > 0$, indépendant de ε , tel que

$$\|\mathbf{e}^{[k]}\| \leq C\varepsilon \max(\|\mathbf{b}\|, 1)$$

b. [Algo] Ecrire une fonction SOR, utilisant (3), et permettant de retourner:

- le premier vecteur $\mathbf{x}^{[k]}$ vérifiant le critère d'arrêt de convergence ou le dernier vecteur $\mathbf{x}^{[k_{\max}]}$ sinon ($k_{\max}$ étant le nombre maximal d'itérations),
- k , le nombre d'itération si convergence et $-k_{\max}$ sinon.

R. 3

a. On a

$$\mathbf{r}^{[k]} = \mathbf{b} - \mathbb{A}\mathbf{x}^{[k]} = \mathbb{A}(\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^{[k]}) = \mathbb{A}\mathbf{e}^{[k]}$$

et donc, comme $\mathbb{A}$ est inversible, $\mathbf{e}^{[k]} = \mathbb{A}^{-1} \mathbf{r}^{[k]}$. On en déduit alors

$$\|\mathbf{e}^{[k]}\| \leq \|\mathbb{A}^{-1}\|_S \|\mathbf{r}^{[k]}\| \leq \|\mathbb{A}^{-1}\| \max(\mathbf{b}, 1) \varepsilon.$$

Avec $C = \|\mathbb{A}^{-1}\|$, on obtient le résultat souhaité.

b. Voici un exemple d'une telle fonction

Algorithme 1 Méthode itérative S.O.R. pour la résolution d'un système linéaire $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$

Données :

$\mathbb{A}$: matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,
 $\mathbf{b}$: vecteur de $\mathbb{K}^n$,
 w : réel de $]0, 2[$,
 $\mathbf{x}^0$: vecteur initial de $\mathbb{K}^n$,
 ε : la tolérance, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$,
kmax : nombre maximum d'itérations, kmax $\in \mathbb{N}^*$

Résultat :

$\mathbf{X}$: un vecteur de $\mathbb{K}^n$, 1er vecteur $\mathbf{x}^{[k]}$
vérifiant le critère d'arrêt de convergence ou
le dernier vecteur $\mathbf{x}^{[k_{\max}]}$
 k : un entier naturel, le nombre d'itération si convergence
et $-k_{\max}$ sinon.

```

1: Fonction  $[\mathbf{X}, k] \leftarrow \text{SOR}(\mathbb{A}, \mathbf{b}, w, \mathbf{x}^0, \varepsilon, \text{kmax})$ 
2:    $k \leftarrow 0, \mathbf{X} \leftarrow \emptyset$ 
3:    $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x}^0, \mathbf{r} \leftarrow \mathbf{b} - \mathbb{A} * \mathbf{x},$ 
4:    $\text{tol} \leftarrow \varepsilon * \max(\|\mathbf{b}\|, 1)$ 
5:   Tantque  $\|\mathbf{r}\| > \text{tol}$  et  $k \leq \text{kmax}$  faire
6:      $k \leftarrow k + 1$ 
7:      $\mathbf{p} \leftarrow \mathbf{x}$ 
8:     Pour  $i \leftarrow 1$  à  $n$  faire
9:        $S \leftarrow 0$ 
10:      Pour  $j \leftarrow 1$  à  $i - 1$  faire
11:         $S \leftarrow S + A(i, j) * x(j)$ 
12:      Fin Pour
13:      Pour  $j \leftarrow i + 1$  à  $n$  faire
14:         $S \leftarrow S + A(i, j) * p(j)$ 
15:      Fin Pour
16:       $x(i) \leftarrow (w/A(i, i) * (b(i) - S) + (1 - w) * p(i)$ 
17:    Fin Pour
18:     $\mathbf{r} \leftarrow \mathbf{b} - \mathbb{A} * \mathbf{x},$ 
19:  Fin Tantque
20:   $\mathbf{X} \leftarrow \mathbf{x}$ 
21:  Si  $\|\mathbf{r}\| > \text{tol}$  alors
22:     $k \leftarrow -\text{kmax}$ 
23:  Fin Si
24: Fin Fonction
```

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$. On définit la matrice $\mathbb{A}_\alpha$ par

$$\mathbb{A}_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \alpha \\ 0 & 2 & 0 \\ \alpha & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On note respectivement $\mathbb{J} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{D}^{-1}(\mathbb{E} + \mathbb{F})$ et $\mathcal{L}_1 \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1}\mathbb{F}$ les matrices d'itérations des méthodes itératives de Jacobi et de Gauss-Seidel.

Q. 4

- a. Etudier la convergence de la méthode de Jacobi pour la résolution de $\mathbb{A}_\alpha \mathbf{x} = \mathbf{b}$.
- b. Etudier la convergence de la méthode de Gauss-Seidel pour la résolution de $\mathbb{A}_\alpha \mathbf{x} = \mathbf{b}$.

R. 4

- a. Oui car la diagonale de $\mathbb{A}_\alpha$ est composée d'éléments non nuls.
- b. On a convergence si et seulement si $\rho(\mathbb{J}) < 1$, c'est à dire si les modules de valeurs propres de $\mathbb{J}$ sont strictement plus petits que 1.
On a

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2}\alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de $\mathbb{J}$ sont les racines du polynôme caractéristique donné par

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det(\lambda \mathbb{I} - \mathbb{J}) \\ &= \det \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \frac{1}{2}\alpha \\ 0 & \lambda & 0 \\ \frac{1}{2}\alpha & 0 & \lambda \end{pmatrix} \\ &= t^3 - \frac{1}{4}\alpha^2 t \end{aligned}$$

Ses racines sont $[-\frac{1}{2}\alpha, \frac{1}{2}\alpha, 0]$ et donc on a convergence si et seulement si $\alpha \in]-2; 2[$.

- c. On a convergence si et seulement si $\rho(\mathcal{L}_1) < 1$, c'est à dire si les modules de valeurs propres de $\mathcal{L}_1$ sont strictement plus petits que 1.
On a

$$\mathcal{L}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2}\alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}\alpha^2 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de $\mathcal{L}_1$ sont les racines du polynôme caractéristique donné par

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det(\lambda \mathbb{I} - \mathcal{L}_1) \\ &= \det \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \frac{1}{2}\alpha \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4}\alpha^2 + \lambda \end{pmatrix} \\ &= t^3 - \frac{1}{4}\alpha^2 t^2 \end{aligned}$$

Ses racines sont $[\frac{1}{4}\alpha^2, 0, 0]$ et donc on a convergence si et seulement si $\alpha \in]-2; 2[$.

EXERCICE 2 (0.0 points)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(n+1)$ couples de $\mathbb{R}^2$, $(x_i, y_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$, tels que les x_i sont distincts deux à deux. On note

Q. 1

- a. Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Montrer qu'il existe un unique polynôme L_i de degré n , que l'on explicitera, et vérifiant

$$L_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad \forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket. \quad (1)$$

- b. Montrer que les $(L_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$ (espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n).

- a. De (1), on déduit que les n points distincts x_j pour $j \in \llbracket 0, n \rrbracket \setminus \{i\}$ sont les n zéros du polynôme L_i de degré n : il s'écrit donc sous la forme

$$L_i(x) = C \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x - x_j) \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

Pour déterminer la constante C , on utilise (1) avec $j = i$

$$L_i(x_i) = 1 = C \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)$$

Les points x_i sont distincts deux à deux, on a $\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j) \neq 0$ et donc

$$C = \frac{1}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)}$$

d'où

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket. \quad (\text{R2.1})$$

Il reste à démontrer l'unicité. On suppose qu'il existe L_i et U_i deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant (1). Alors $Q_i = L_i - U_i$ est polynôme de degré n (au plus) admettant $n + 1$ zéros distincts, c'est donc le polynôme nul et on a nécessairement $L_i = U_i$.

- b. On sait que $\dim \mathbb{R}_n[X] = n + 1$. Pour que les $\{L_i\}_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$ il suffit de démontrer qu'ils sont linéairement indépendants.
Soit $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ $n + 1$ scalaires. Montrons pour celà que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i L_i = 0 \implies \lambda_i = 0, \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$$

Noter que la première égalité est dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ et donc le 0 est pris au sens polynôme nul.

On a

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i L_i = 0 \iff \sum_{i=1}^n \lambda_i L_i(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. En choisissant $x = x_k$, on a par (1) $\sum_{i=1}^n \lambda_i L_i(x_k) = \lambda_k$ et donc

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i L_i = 0 \implies \sum_{i=1}^n \lambda_i L_i(x_k) = 0, \quad \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket \iff \lambda_k = 0, \quad \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket.$$

Les $\{L_i\}_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ sont donc linéairement indépendants.

On définit le polynôme P_n par

$$P_n(t) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(t). \quad (2)$$

- a. Montrer que le polynôme P_n est l'unique polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad P_n(x_i) = y_i. \quad (3)$$

- b. [Algo] Ecrire une fonction algorithmique, nommée *Lagrange*, retournant $P_n(t)$ avec $t \in \mathbb{R}$ donné.

a. Par construction $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ et on a, $\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$\begin{aligned} P_n(x_j) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^n y_i L_i(x_j) \\ &= \sum_{i=0}^n y_i \delta_{i,j} \text{ par (1)} \\ &= y_j. \end{aligned}$$

Pour démontrer l'unicité, on propose ici deux méthodes

- On note P_a et P_b deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant (1). Le polynôme $Q = P_a - P_b$ appartient aussi à $\mathbb{R}_n[X]$ et il vérifie, $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$Q(x_i) = P_a(x_i) - P_b(x_i) = 0.$$

Les $n+1$ points x_i étant distincts, ce sont donc $n+1$ racines distinctes du polynôme Q . Or tout polynôme de degré n admet au plus n racines distinctes. On en déduit que le seul polynôme de degré au plus n admettant $n+1$ racines distinctes est le polynôme nul et donc $P_a = P_b$.

- c'est l'unique polynôme de degré au plus n vérifiant (2) car la décomposition dans la base $\{L_i\}_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est unique.

b. Voici un exemple de fonction

Algorithme 2 Fonction **LAGRANGE** permettant de calculer le polynôme d'interpolation de Lagrange $\mathcal{P}_n(x)$ défini par (2)

Données : $\mathbf{X}$: vecteur/tableau de $\mathbb{R}^{n+1}$, $\mathbf{X}(i) = x_{i-1} \ \forall i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ et
 $\mathbf{X}(i) \neq \mathbf{X}(j)$ pour $i \neq j$,
 $\mathbf{Y}$: vecteur/tableau de $\mathbb{R}^{n+1}$, $\mathbf{Y}(i) = y_{i-1} \ \forall i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$,
 t : un réel.

Résultat : y : le réel $y = \mathcal{P}_n(t)$.

```

1: Fonction  $y \leftarrow \text{LAGRANGE}(t, \mathbf{X}, \mathbf{Y})$ 
2:    $y \leftarrow 0$ 
3:   Pour  $i \leftarrow 1$  à  $n+1$  faire
4:      $L \leftarrow 1$ 
5:     Pour  $j \leftarrow 1$  à  $n+1$ , ( $j \sim i$ ) faire
6:        $L \leftarrow L * (t - \mathbf{X}(j)) / (\mathbf{X}(i) - \mathbf{X}(j))$ 
7:     Fin Pour
8:      $y \leftarrow y + \mathbf{Y}(i) * L$ 
9:   Fin Pour
10:  return  $y$ 
11: Fin Fonction
```

Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note par P_k l'unique polynôme de $\mathbb{R}_k[X]$ vérifiant $P_k(x_i) = y_i, \forall i \in \llbracket 0, k \rrbracket$, et par π_k le polynôme

$$\pi_k(t) = \prod_{i=0}^k (t - x_i).$$

On va établir une formule de récurrence permettant de déterminer P_k à partir de P_{k-1} .

En effectuant la division euclidienne du polynôme P_k par le polynôme π_{k-1} on a

$$P_k = R_{k-1} + Q_{k-1} \pi_{k-1} \tag{4}$$

avec $R_{k-1} \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$ et $Q_{k-1} \in \mathbb{R}_0[X]$.

a. Démontrer que $R_{k-1} = P_{k-1}$.

b. En déduire que

$$Q_{k-1} = \frac{y_k - P_{k-1}(x_k)}{\pi_{k-1}(x_k)}.$$

c. Déterminer P_0 .

d. [Alg] Proposer une fonction algorithmique réursive, nommée *LagrangeRec*, permettant de calculer $P_n(t)$ en utilisant la formule de récurrence (4).

R. 3

a. On a, $\forall i \in \llbracket 0, k \rrbracket$, $P_k(x_i) = y_i$, ce qui donne

$$\forall i \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket, \quad y_i = R_{k-1}(x_i) + Q_{k-1} \overbrace{\pi_{k-1}(x_i)}^{=0} = R_{k-1}(x_i).$$

Or P_{k-1} est l'unique polynôme de $\mathbb{R}_{k-1}[X]$ tel que $\forall i \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$, $P_{k-1}(x_i) = y_i$. On en déduit donc $R = P_{k-1}$.

b. On a

$$P_k(x_k) = y_k = R(x_k) + Q_{k-1}\pi_{k-1}(x_k).$$

Les points $(x_i)_{i=0}^k$ étant distincts deux à deux, on obtient $\pi_{k-1}(x_k) \neq 0$ et on en déduit

$$Q_{k-1} = \frac{y_k - P_{k-1}(x_k)}{\pi_{k-1}(x_k)}.$$

c. On a $P_0(x) = y_0$.

d. Voici un exemple d'une telle fonction

Algorithme 3 Fonction **LAGRANGEREC** permettant de calculer le polynôme d'interpolation de Lagrange $\mathcal{P}_n(x)$ définit par ...

Données : $\mathbf{X}$: vecteur/tableau de $\mathbb{R}^{n+1}$, $X(i) = x_{i-1} \quad \forall i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ et
 $X(i) \neq X(j)$ pour $i \neq j$,
 $\mathbf{Y}$: vecteur/tableau de $\mathbb{R}^{n+1}$, $Y(i) = y_{i-1} \quad \forall i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$,
 t : un réel.

Résultat : z : le réel $z = \mathcal{P}_n(t)$.

```
1: Fonction  $y \leftarrow \mathbf{LAGRANGEREC}(t, \mathbf{X}, \mathbf{Y})$ 
2:    $n \leftarrow \text{length}(\mathbf{X}) - 1$ 
3:   Si  $n == 0$  alors
4:      $z \leftarrow \mathbf{Y}(1)$ 
5:   Sinon
6:      $Q \leftarrow (Y(n+1) - \mathbf{LAGRANGEREC}(\mathbf{X}(n+1), \mathbf{X}(1:n), \mathbf{Y}(1:n))) / \text{PolyPin}(\mathbf{X}(n+1), \mathbf{X}(1:n))$ 
7:      $z \leftarrow \mathbf{LAGRANGEREC}(t, \mathbf{X}(1:n), \mathbf{Y}(1:n)) + Q * \text{PolyPin}(t, \mathbf{X}(1:n))$ 
8:   Fin Si
9: Fin Fonction
```

Algorithme 4 Fonction **POLYPIN** permettant de calculer le polynôme π_n en $t \in \mathbb{R}$ donné par $\pi_n(t) =$

$$\prod_{j=0}^n (t - x_j)$$

Données : $\mathbf{X}$: vecteur/tableau de $\mathbb{R}^{n+1}$, $\mathbf{X}(i) = x_{i-1} \ \forall i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ et
 $\mathbf{X}(i) \neq \mathbf{X}(j)$ pour $i \neq j$,
 t : un réel.

Résultat : y : le réel $y = \pi_n(t)$.

```
1: Fonction  $y \leftarrow \text{POLYPIN}(t, \mathbf{X})$ 
2:    $y \leftarrow 1$ 
3:   Pour  $j \leftarrow 0$  à  $n$  faire
4:      $y \leftarrow y * (t - \mathbf{X}(j+1))$ 
5:   Fin Pour
6: Fin Fonction
```

Q. 4 Application

Soient $A = (0, -2)$, $B = (1, 1)$ et $C = (2, 6)$. On cherche à expliciter le polynôme d'interpolation de Lagrange, noté P , passant par les points A , B et C .

- Sans utiliser la formule de récurrence (4), déterminer P en détaillant les calculs.
- En utilisant la formule de récurrence (4), détailler les calculs permettant d'obtenir P .

R. 4

- En utilisant la formule (2) avec $n = 2$ et en posant

$$(x_0, y_0) = A, (x_1, y_1) = B \text{ et } (x_2, y_2) = C$$

on obtient

$$L_0(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x-2), \quad L_1(x) = -(x-2)x \text{ et } L_2(x) = \frac{1}{2}(x-1)x.$$

On en déduit alors

$$P(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) = -(x-1)(x-2) + 3(x-1)x - (x-2)x = x^2 + 2x - 2.$$

- On a $P_0(x) = y_0 = -2$ puis on utilise la formule de récurrence:

- $k = 1$. On a

$$Q = \frac{y_1 - P_0(x_1)}{\pi_0(x_1)} = \frac{1 - (-2)}{1} = 3$$

et donc

$$P_1(x) = P_0(x) + Q\pi_1(x) = 3x - 2.$$

- $k = 2$. On a

$$Q = \frac{y_2 - P_1(x_2)}{\pi_1(x_2)} = \frac{6 - 4}{2} = 1$$

et donc

$$P_2(x) = P_1(x) + Q\pi_2(x) = (x-1)x + 3x - 2 = x^2 + 2x - 2.$$

EXERCICE 3 (0.0 points)

Soient f une fonction définie sur $[-1, 1]$ à valeurs réelles et $n \in \mathbb{N}$. On souhaite approcher $\int_{-1}^1 f(x)dx$ par

$\mathcal{Q}_n(f)$ une formule de quadrature élémentaire

$$\mathcal{Q}_n(f) \stackrel{\text{def}}{=} 2 \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) \quad (1)$$

où les $(x_i)_{i=0}^n$ sont des points distincts 2 à 2 dans $[-1, 1]$ et les $(w_i)_{i=0}^n$ sont des réels.

Q. 1

- a. Démontrer que l'application $\mathcal{Q}_n$ définie de $\mathcal{C}^0([-1, 1]; \mathbb{R})$, muni de la norme infinie, à valeurs dans $\mathbb{R}$ est linéaire et continue.
- b. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathcal{Q}_n$ est de degré d'exactitude k au moins si et seulement si

$$\forall r \in \llbracket 0, k \rrbracket, \quad \mathcal{Q}_n(x \mapsto x^r) = \int_{-1}^1 x^r dx. \quad (2)$$

R. 1

- a. On commence par démontrer la linéarité. Soient f et g dans $\mathcal{C}^0([-1, 1]; \mathbb{R})$, et λ et μ deux réels. Alors $\lambda f + \mu g \in \mathcal{C}^0([-1, 1]; \mathbb{R})$, et on a

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_n(\lambda f + \mu g) &= 2 \sum_{j=0}^n w_j (\lambda f + \mu g)(x_j) \\ &= 2 \sum_{j=0}^n w_j (\lambda f(x_j) + \mu g(x_j)) \\ &= \lambda 2 \sum_{j=0}^n w_j f(x_j) + \mu 2 \sum_{j=0}^n w_j g(x_j) \\ &= \lambda \mathcal{Q}_n(f) + \mu \mathcal{Q}_n(g). \end{aligned}$$

L'application $f \mapsto \mathcal{Q}_n(f)$ est donc linéaire. Pour démontrer qu'elle est continue, il suffit alors de démontrer que

$$\exists C > 0, \quad \text{tel que } \forall f \in \mathcal{C}^0([-1, 1]; \mathbb{R}), \quad |\mathcal{Q}_n(f)| \leq C \|f\|_\infty.$$

Or, on a, pour tout $f \in \mathcal{C}^0([-1, 1]; \mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} |\mathcal{Q}_n(f)| &= \left| 2 \sum_{j=0}^n w_j f(x_j) \right| \\ &\leq 2 \sum_{j=0}^n |w_j| |f(x_j)| \\ &\leq C \|f\|_\infty, \quad \text{avec } C = 2 \sum_{j=0}^n |w_j| \text{ indépendant de } f. \end{aligned}$$

- b. $\Rightarrow$ Soit $r \in \llbracket 0, k \rrbracket$, Comme $x \mapsto x^r$ est dans $\mathcal{C}^0([-1, 1]; \mathbb{R})$, et que la formule de quadrature est exacte pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à k , on en déduit

$$\mathcal{Q}_n(x \mapsto x^r) = \int_{-1}^1 x^r dx, \quad \forall r \in \llbracket 0, k \rrbracket.$$

$\Leftarrow$ Soit $P \in \mathbb{R}_k[X]$. On peut le décomposer dans la base des monômes: il existe $(a_i)_{i=0}^k$ réels tels que

$$P(x) = \sum_{i=0}^k a_i x^i.$$

Par linéarité de l'application $f \mapsto \mathcal{Q}_n(f)$, on a

$$\mathcal{Q}_n(x \mapsto P(x)) = \sum_{i=0}^k a_i \mathcal{Q}_n(x \mapsto x^i).$$

Par hypothèse, on a

$$\mathcal{Q}_n(x \mapsto x^r) = \int_{-1}^1 x^r dx, \quad \forall r \in \llbracket 0, k \rrbracket$$

et donc

$$\mathcal{Q}_n(x \mapsto P(x)) = \sum_{i=0}^k a_i \int_{-1}^1 x^i dx.$$

Par linéarité de l'intégrale, on obtient

$$\mathcal{Q}_n(x \mapsto P(x)) = \int_{-1}^1 \sum_{i=0}^k a_i x^i dx = \int_{-1}^1 P(x) dx.$$

On en déduit donc que $\mathcal{Q}_n(f)$ est de degré d'exactitude k .

On note $(t_i)_{i=0}^{n+1}$ les points de la discrétisation régulière de l'intervalle $[-1, 1]$ en $(n + 2)$ points et, pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, x_i le point milieu de l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$.

Q. 2

a. *Expliciter t_i et x_i en fonction de i et n .*

b. *Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathcal{Q}_n$ est de degré d'exactitude k au moins si et seulement si*

$$\forall r \in \llbracket 0, k \rrbracket, \quad \sum_{i=0}^n w_i x_i^r = \begin{cases} 0 & \text{si } r \text{ est impaire} \\ \frac{1}{r+1} & \text{sinon} \end{cases} \quad (3)$$

c. *Montrer que (3) peut s'écrire sous la forme d'un système linéaire $\mathbb{A}\mathbf{W} = \mathbf{b}$ avec $\mathbf{W} = (w_0, \dots, w_n)^t \in \mathbb{R}^{n+1}$ où l'on explicitera $\mathbb{A}$ et $\mathbf{b}$ en précisant leurs dimensions.*

d. *En déduire qu'avec le choix des points $(x_i)_{i=0}^n$, il existe une unique formule de quadrature de degré d'exactitude n au moins.*

R. 2

a. On a

$$\forall i \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket, \quad t_i = -1 + ih, \quad \text{avec } h = \frac{2}{n+1}$$

et

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad x_i = t_i + \frac{h}{2}.$$

Ce qui donne

$$\forall i \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket, \quad t_i = \frac{2i - (n+1)}{n+1} \quad \text{et} \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad x_i = \frac{2i + 1 - (n+1)}{n+1}$$

b. On a vu que $\mathcal{Q}_n$ est de degré d'exactitude k au moins si et seulement si (3) est vérifiée. Or on a

$$\forall r \in \llbracket 0, k \rrbracket, \quad \mathcal{Q}_n(x \mapsto x^r) = 2 \sum_{i=0}^n w_i x_i^r$$

et

$$\forall r \in \llbracket 0, k \rrbracket, \quad \int_{-1}^1 x^r dx = \begin{cases} 0 & \text{si } r \text{ est impaire} \\ \frac{2}{r+1} & \text{sinon} \end{cases}$$

Ce qui prouve le résultat.

c. On a $(k+1)$ équations à $(n+1)$ inconnues qui s'écrit sous la forme $\mathbb{A}\mathbf{W} = \mathbf{b}$ avec avec

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} x_0^0 & x_1^0 & \dots & x_n^0 \\ x_0^1 & x_1^1 & \dots & x_n^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^k & x_1^k & \dots & x_n^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0^1 & x_1^1 & \dots & x_n^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^k & x_1^k & \dots & x_n^k \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{k+1, n+1}(\mathbb{R})$$

et $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{k+1}$ avec

$$\forall j \in \llbracket 1, k+1 \rrbracket, \mathbf{b}_j = \begin{cases} 0 & \text{si } j \text{ est pair} \\ \frac{1}{j} & \text{sinon} \end{cases}$$

d. Avec $k = n$, $\mathcal{Q}_n$ est de degré d'exactitude n au moins si et seulement si

$$\mathbb{A}\mathbf{W} = \mathbf{b}$$

avec $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ et $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{N+1}$ donnés précédemment. On peut voir que la matrice $\mathbb{A}$ est la transposée de la matrice de Vandermonde associée aux points $(x_i)_{i=0}^n$. Hors cette matrice est inversible si et seulement si les points $(x_i)_{i=0}^n$ sont distincts deux à deux. C'est le cas ici! On en déduit donc l'existence et l'unicité du vecteur $\mathbf{W}$ et donc des $(w_i)_{i=0}^n$.

On dispose des fonctions algorithmiques:

- $\mathbf{x} \leftarrow \text{Solve}(\mathbb{A}, \mathbf{b})$ résolvant le système linéaire $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ avec $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible et $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$,
- $z \leftarrow \text{Power}(x, y)$ retournant x^y avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Q. 3 [Algo]

- Ecrire une fonction algorithmique, nommée *MidPoints*, retournant l'ensemble des $(x_i)_{i=0}^n$ et des $(w_i)_{i=0}^n$ tels que $\mathcal{Q}_n$ soit de degré d'exactitude n au moins.
- Ecrire une fonction algorithmique, nommée *QuadElemMidPoints*, retournant $\mathcal{Q}_n(f)$ avec $f \in \mathcal{C}^0([-1, 1]; \mathbb{R})$.

R. 3

- Voci un exemple de fonction:

Algorithme 5 Fonction **MIDPOINT** permettant de calculer les points $(x_i)_{i=0}^n$ et $(w_i)_{i=0}^n$ tels que $\mathcal{Q}_n$ soit de degré d'exactitude n au moins

Données : n : un entier naturel.

Résultat : $\mathbf{X}$: vecteur/tableau de $\mathbb{R}^{n+1}$, $\mathbf{W}(i) = x_{i-1} \ \forall i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ et avec

$\mathbf{W}$: vecteur/tableau de $\mathbb{R}^{n+1}$, $\mathbf{W}(i) = w_{i-1} \ \forall i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ et $\mathbf{X}(i) \neq \mathbf{X}(j)$ pour $i \neq j$,

```
1: Fonction  $[\mathbf{X}, \mathbf{W}] \leftarrow \mathbf{MIDPOINT}(n)$ 
2:    $h \leftarrow 2/(n+1)$ 
3:   Pour  $i \leftarrow 0$  à  $n$  faire
4:      $\mathbf{X}(i+1) \leftarrow -1 + (i+1/2) * h$ 
5:   Fin Pour
6:    $\mathbb{A} \leftarrow \mathbb{O}_{n+1}$ 
7:   Pour  $i \leftarrow 1$  à  $n+1$  faire
8:     Pour  $j \leftarrow 1$  à  $n+1$  faire
9:        $\mathbb{A}(i, j) \leftarrow \text{Power}(\mathbf{X}(j), i-1)$ 
10:    Fin Pour
11:  Fin Pour
12:   $\mathbf{b} \leftarrow \mathbf{O}_{n+1}$ 
13:  Pour  $j \leftarrow 1$  à  $n+1$  (pas +2) faire
14:     $\mathbf{b}(j) \leftarrow 1/j$ 
15:  Fin Pour
16:   $\mathbf{W} \leftarrow \text{Solve}(\mathbb{A}, \mathbf{b})$ 
17: Fin Fonction
```

- Voci un exemple de fonction:

Algorithme 6 Fonction **QUADELEMPOINT** permettant de calculer $\mathcal{Q}_n(f)$

Données : f : $f \in \mathcal{C}^0([-1, 1]; \mathbb{R})$,
 n : un entier naturel.

Résultat : y : $y = \mathcal{Q}_n(f) \in \mathbb{R}$.

```
1: Fonction  $y \leftarrow \text{QUADELEMPOINT}(f, n)$ 
2:  $[X, W] \leftarrow \text{MidPoint}(n)$ 
3:  $y \leftarrow 0$ 
4: Pour  $i \leftarrow 1$  à  $n + 1$  faire
5:    $y \leftarrow y + W(i) * f(X(i))$ 
6: Fin Pour
7:  $y \leftarrow 2 * y$ 
8: Fin Fonction
```

Q. 4 Application

On fixe $n = 2$.

- a. Déterminer explicitement les points $(x_i)_{i=0}^2$ et les poids $(w_i)_{i=0}^2$ de tel sorte que $\mathcal{Q}_2$ soit de degré d'exactitude 2 au moins.
- b. Déterminer le degré d'exactitude maximal de $\mathcal{Q}_2$.

R. 4

- a. On a $x_0 = -\frac{2}{3}$, $x_1 = 0$ et $x_2 = \frac{2}{3}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_2(x \mapsto 1) &= 2w_0 + 2w_1 + 2w_2 & \text{et} & \int_{-1}^1 1dx = 2 \\ \mathcal{Q}_2(x \mapsto x) &= -\frac{4}{3}w_0 + \frac{4}{3}w_2 & \text{et} & \int_{-1}^1 xdx = 0 \\ \mathcal{Q}_2(x \mapsto x^2) &= \frac{8}{9}w_0 + \frac{8}{9}w_2 & \text{et} & \int_{-1}^1 x^2dx = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

On obtient donc le système

$$\begin{cases} 2w_0 + 2w_1 + 2w_2 &= 2 \\ -\frac{4}{3}w_0 + \frac{4}{3}w_2 &= 0 \\ \frac{8}{9}w_0 + \frac{8}{9}w_2 &= \frac{2}{3} \end{cases}$$

Après résolution, on obtient

$$w_0 = \left(\frac{3}{8}\right), \quad w_1 = \left(\frac{1}{4}\right), \quad w_2 = \left(\frac{3}{8}\right).$$

- b. On a

$$\mathcal{Q}_2(x \mapsto x^3) = -\frac{16}{27}w_0 + \frac{16}{27}w_2 = 0 \quad \text{et} \quad \int_{-1}^1 x^3dx = 0.$$

Ce qui donne

$$\mathcal{Q}_2(x \mapsto x^3) = \int_{-1}^1 x^3dx$$

et donc $\mathcal{Q}_2$ est de degré d'exactitude 3 au moins.

On a

$$\mathcal{Q}_2(x \mapsto x^4) = \frac{32}{81}w_0 + \frac{32}{81}w_2 = \frac{8}{27} \quad \text{et} \quad \int_{-1}^1 x^4dx = \frac{2}{5}.$$

Ce qui donne

$$\mathcal{Q}_2(x \mapsto x^4) \neq \int_{-1}^1 x^4dx$$

et donc $\mathcal{Q}_2$ à pour degré d'exactitude maximal 3.