B.2 Algèbre linéaire

Note

Toute cette partie peut être joyeusement omise par tout Homo sapiens *algebra linearis* compatible. Toutefois une lecture rapide permet de se raffraichir la mémoire.

Soit V un **espace vectoriel** de dimension finie n, sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels, ou sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Notons plus généralement $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

B.2.1 Vecteurs

Une **base** de V est un ensemble $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ de n **vecteurs linéairement indépendants**. Le vecteur $\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \boldsymbol{e}_i$ sera représenté par le **vecteur colonne**

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

et on désignera par $\boldsymbol{v}^t$ et $\boldsymbol{v}^*$ les **vecteurs lignes** suivants

$$\boldsymbol{v}^t = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix}, \; \boldsymbol{v}^* = \begin{pmatrix} \overline{v_1} & \overline{v_2} & \cdots & \overline{v_n} \end{pmatrix}$$

où $\overline{\alpha}$ est le nombre **complexe conjugué** du nombre α.

Définition B.2.1.
- *Le vecteur ligne $\boldsymbol{v}^t$ est le **vecteur transposé** du vecteur colonne $\boldsymbol{v}$.*
- *Le vecteur ligne $\boldsymbol{v}^*$ est le **vecteur adjoint** du vecteur colonne $\boldsymbol{v}$.*

Définition B.2.2. *L'application $\langle \bullet, \bullet \rangle : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ définie pour tout $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n$ par*

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \boldsymbol{u}^t.\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^t.\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i, \quad si \quad \mathbb{K} = \mathbb{R} \tag{B.12}$$

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \boldsymbol{u}^*.\boldsymbol{v} = \overline{\boldsymbol{v}^*.\boldsymbol{u}} = \overline{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle} = \sum_{i=1}^{n} \overline{u_i} v_i, \quad si \quad \mathbb{K} = \mathbb{C} \tag{B.13}$$

*est appelée **produit scalaire** euclidien si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, hermitien[a] si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Pour rappeler la dimension de l'espace, on écrit*

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle_n .$$

[a] La convention choisie pour le produit scalaire hermitien étant ici : linéarité à droite et semi-linéarité à gauche. Il est aussi possible de définir le produit scalaire hermitien par le complexe conjugué de (B.13) :

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \boldsymbol{v}^*.\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{n} u_i \overline{v_i}.$$

Dans ce cas le produit scalaire est une forme sesquilinéaire à droite.

Définition B.2.3. *Soit V est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire.*

- *Deux **vecteurs** $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ sont **Orthogonaux** si $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = 0$.*
- *Un **vecteur** $\boldsymbol{v}$ est **orthogonal à une partie** U de V si*

$$\forall \boldsymbol{u} \in U, \; \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = 0.$$

On note $\boldsymbol{v} \perp U$.

- *Un ensemble de vecteurs $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ de l'espace V est dit **orthonormal** si*

$$\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j \rangle = \delta_{i,j}, \; \forall (i,j) \in [\![1, k]\!]^2$$

*où δ_{ij} est le **symbole de Kronecker :** $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & si\ i = j, \\ 0 & si\ i \neq j. \end{cases}$*

Définition B.2.4. *Le vecteur nul de $\mathbb{K}^n$ est représenté par $\boldsymbol{0}_n$ ou $\boldsymbol{0}$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité.*

Définition B.2.5. *Soit $\boldsymbol{u} \in \mathbb{K}^n$ non nul. On définit l'**opérateur de projection** sur $\boldsymbol{u}$ par*

$$\mathrm{proj}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{v}) = \frac{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle}{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle} \boldsymbol{u} = \frac{1}{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle} \boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^* \boldsymbol{v}, \; \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n. \tag{B.14}$$

La matrice $\mathbb{P}_{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*$ s'appelle la matrice de la projection orthogonale suivant le vecteur $\boldsymbol{u}$.

Proposition B.2.1 (Procédé de Gram-Schmidt)**.** *Soit $\{\boldsymbol{v}_i\}_{i \in [\![1,n]\!]}$ une base de $\mathbb{K}^n$. On construit successivement les vecteurs $\boldsymbol{u}_i$*

$$\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{v}_i - \sum_{k=1}^{i-1} \mathrm{proj}_{\boldsymbol{u}_k}(\boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{v}_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\langle \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{v}_i \rangle}{\langle \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{u}_k \rangle} \boldsymbol{u}_k, \; \forall i \in [\![1, n]\!].$$

*Ils forment une **base orthogonale** de $\mathbb{K}^n$ et $\mathrm{Vect}(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_i) = \mathrm{Vect}(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i)$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$ (voir Exercice 2.3.13, page 257).*
*Pour construire une **base orthonormale** $\{\boldsymbol{z}_i\}_{i \in [\![1,n]\!]}$, il suffit de normaliser les vecteurs de la base orthogonale:*

$$\boldsymbol{z}_i = \frac{\boldsymbol{u}_i}{\langle \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_i \rangle^{1/2}}, \quad \forall i \in [\![1, n]\!].$$

B.2.2 Matrices

Généralités

Une matrice à m lignes et n colonnes est appelée *matrice de type* (m, n), et on note $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, ou simplement $\mathcal{M}_{m,n}$, l'espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ formé par les matrices de type (m, n) à éléments dans $\mathbb{K}$.
Une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ d'éléments $\mathrm{A}_{ij} \in \mathbb{K}$ est notée

$$\mathbb{A} = (\mathrm{A}_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant m, \; 1 \leqslant j \leqslant n},$$

le premier indice i correspond aux lignes et le second j aux colonnes. On désigne par $(\mathbb{A})_{ij}$ l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne. On peut aussi le noter $\mathrm{A}_{i,j}$.

Définition B.2.6. *La matrice nulle de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est représentée par $\mathbb{O}_{m,n}$ ou $\mathbb{O}$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité. Si $m = n$ on peut aussi noter $\mathbb{O}_n$ cette matrice.*

Définition B.2.7.
- *Soit une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, on note $\mathbb{A}^* \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ la **matrice adjointe** de la matrice $\mathbb{A}$, définie de façon unique par*

$$\langle \mathbb{A}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle_m = \langle \boldsymbol{u}, \mathbb{A}^* \boldsymbol{v} \rangle_n, \; \forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n, \; \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^m$$

qui entraine $(\mathbb{A}^*)_{ij} = \overline{\mathrm{A}_{ji}}$.

- *Soit une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, on note $\mathbb{A}^t \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ la **matrice transposée** de la* *matrice $\mathbb{A}$, définie de façon unique par*

$$\langle \mathbb{A}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle_m = \langle \boldsymbol{u}, \mathbb{A}^t\boldsymbol{v}\rangle_n, \ \forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n, \ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^m$$

qui entraine $(\mathbb{A}^t)_{ij} = A_{ji}$.

Définition B.2.8. *Si $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, le **produit**$\mathbb{A}\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est défini par*

$$\forall (i,j) \in [\![1,m]\!] \times [\![1,n]\!], \quad (\mathbb{A}\mathbb{B})_{ij} = \sum_{k=1}^{p} A_{ik}B_{kj}. \tag{B.15}$$

Exercice 2.2.1 ***résultats à savoir***

Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, montrer que

$$(\mathbb{A}\mathbb{B})^t = \mathbb{B}^t\mathbb{A}^t, \quad \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{R}, \tag{B.1}$$

$$(\mathbb{A}\mathbb{B})^* = \mathbb{B}^*\mathbb{A}^*, \quad \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{C} \tag{B.2}$$

Les matrices considérées jusqu'à la fin de ce paragraphe sont carrées.

Définition B.2.9. *Si $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors les éléments $A_{ii} = (\mathbb{A})_{ii}$ sont appelés **éléments diagonaux** et les éléments $A_{ii} = (\mathbb{A})_{ij}, i \neq j$ sont appelés **éléments hors-diagonaux**.*

Définition B.2.10. *On appelle **matrice identitée** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice dont les éléments diagonaux sont tous égals à 1 et les éléments hors-diagonaux nulles. On la note $\mathbb{I}$ ou encore $\mathbb{I}_n$ et on a*

$$(\mathbb{I})_{i,j} = \delta_{ij}, \ \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2.$$

Définition B.2.11. *Une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **inversible** ou **régulière** s'il existe une matrice $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant*

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{B}\mathbb{A} = \mathbb{I} \tag{B.16}$$

*Dans le cas contraire, on dit que la matrice $\mathbb{A}$ est **singulière** ou **non inversible**.*

On peut noter que la matrice $\mathbb{B}$ est unique. En effet, soient $\mathbb{B}_1$ et $\mathbb{B}_2$ vérifiant (B.16). On a alors $\mathbb{A}\mathbb{B}_2 = \mathbb{I}$ et donc $\mathbb{B}_1(\mathbb{A}\mathbb{B}_2) = \mathbb{B}_1$. On a aussi $\mathbb{B}_1\mathbb{A} = \mathbb{I}$ et donc $(\mathbb{B}_1\mathbb{A})\mathbb{B}_2 = \mathbb{B}_2$. Le produit des matrices étant associatif on a $\mathbb{B}_1(\mathbb{A}\mathbb{B}_2) = (\mathbb{B}_1\mathbb{A})\mathbb{B}_2$ et donc $\mathbb{B}_1 = \mathbb{B}_2$.

Définition B.2.12. *Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible. On note $\mathbb{A}^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'unique matrice vérifiant*

$$\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{A} = \mathbb{I}. \tag{B.17}$$

*Cette matrice est appelée **matrice inverse** de $\mathbb{A}$.*

Définition B.2.13. *Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$*

- *On note $\ker(\mathbb{A}) = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n \ ; \ \mathbb{A}\boldsymbol{v} = 0\}$ le **noyau** de $\mathbb{A}$.*
- *On note $\mathrm{im}(\mathbb{A}) = \{\mathbb{A}\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^m \ ; \ \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n\}$ l'**image** de $\mathbb{A}$.*
- *On note $\mathrm{rank}(\mathbb{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \dim(\mathrm{im}(\mathbb{A}))$ le **rang** de $\mathbb{A}$.*

B. Annexes B.2.2 Matrices
B.2. Algèbre linéaire

Théorème B.2.1 ((théorème du rang))**.** *Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. On a*

$$\mathrm{rank}(\mathbb{A}) + \dim(\ker(\mathbb{A})) = n$$

Proposition B.2.2. *Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes*

a. *$\mathbb{A}$ est inversible,*

b. $\mathrm{rank}(\mathbb{A}) = n$,

c. $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n, \ \mathbb{A}\boldsymbol{x} = 0 \ \Rightarrow \ \boldsymbol{x} = 0$, *(i.e.* $\ker \mathbb{A} = \{0\}$*)*

d. $\det(\mathbb{A}) \neq 0$,

e. *toutes les valeurs propres de $\mathbb{A}$ sont non nulles,*

f. *il existe $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que* $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{I}$,

g. *il existe $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que* $\mathbb{B}\mathbb{A} = \mathbb{I}$.

Exercice 2.2.2 ***résultats à savoir***

Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversibles. Montrer que $\mathbb{A}\mathbb{B}$ inversible et

$$(\mathbb{A}^t)^{-1} = (\mathbb{A}^{-1})^t, \quad \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{R}, \tag{B.1}$$

$$(\mathbb{A}^*)^{-1} = (\mathbb{A}^{-1})^*, \quad \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{C}. \tag{B.2}$$

$$(\mathbb{A}\mathbb{B})^{-1} = \mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}^{-1} \tag{B.3}$$

$$(\mathbb{A}^{-1})^{-1} = \mathbb{A} \tag{B.4}$$

Définition B.2.14. *Une matrice **carrée** $\mathbb{A}$ est :*

- ***symétrique** si $\mathbb{A}$ est réelle et $\mathbb{A} = \mathbb{A}^t$,*
- ***hermitienne** si $\mathbb{A} = \mathbb{A}^*$,*
- ***normale** si $\mathbb{A}\mathbb{A}^* = \mathbb{A}^*\mathbb{A}$,*
- ***orthogonale** si $\mathbb{A}$ est réelle et $\mathbb{A}\mathbb{A}^t = \mathbb{A}^t\mathbb{A} = \mathbb{I}$,*
- ***unitaire** si $\mathbb{A}\mathbb{A}^* = \mathbb{A}^*\mathbb{A} = \mathbb{I}$,*

Proposition B.2.3.

- *une matrice symétrique ou hermitienne est nécessairement normale.*
- *une matrice orthogonale (resp. unitaire) est nécessairement normale et inversible d'inverse $\mathbb{A}^t$ (resp. $\mathbb{A}^*$).*

Définition B.2.15. *Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice **hermitienne**.*

- *Elle est **définie positive** si*
$$\langle \mathbb{A}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle > 0, \ \forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\} \tag{B.18}$$
- *Elle est **semi définie positive** si*
$$\langle \mathbb{A}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle \geqslant 0, \ \forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\} \tag{B.19}$$

Exercice 2.2.3

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Q. 1 *Que peut-on dire de la matrice $\mathbb{A}\mathbb{A}^*$? Et si la matrice $\mathbb{A}$ est inversible?*

Q. 2 *Proposer une technique permettant de générer une matrice hermitienne semi-définie positive à partir d'une matrice aléatoire quelconque.*

Q. 3 *Proposer une technique permettant de générer une matrice hermitienne définie positive à partir d'une matrice triangulaire inférieure inversible aléatoire.*

Définition B.2.16. *Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La trace d'une matrice carrée $\mathbb{A} = (a_{ij})$ est définie par*

$$\operatorname{tr}(\mathbb{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Définition B.2.17. *Soit $\mathcal{T}_n$ le **groupe des permutations** de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$. A tout élément $\sigma \in \mathcal{T}_n$, on associe la **matrice de permutation** de $\mathbb{P}_\sigma \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est définie par*

$$(\mathbb{P}_\sigma)_{i,j} = \delta_{i,\sigma(j)}.$$

Exercice 2.2.4 ***résultats à savoir***

Montrer qu'une matrice de permutation est orthogonale.

Définition B.2.18. *Soient $\mathbb{A} = (A_{i,j})_{i,j=1}^n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{T}_n$ le **groupe des permutations** de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$.. Le **déterminant** d'une matrice $\mathbb{A}$ est défini par*

$$\det(\mathbb{A}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{T}_n} \varepsilon_\sigma \prod_{j=1}^{n} A_{\sigma(j),j}$$

où ε_σ désigne la signature de la permutation σ.

Proposition B.2.4 (Méthode de Laplace ou des coffacteurs)**.** *Soit $\mathbb{A} = (A_{i,j})_{i,j=1}^n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\mathbb{A}^{[i,j]} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ la matrice obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j de $\mathbb{A}$. On a alors le **développement par rapport à la ligne** $i \in [\![1, n]\!]$*

$$\det(\mathbb{A}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{i,j} \det\left(\mathbb{A}^{[i,j]}\right), \tag{B.20}$$

*et le **développement par rapport à la colonne** $j \in [\![1, n]\!]$*

$$\det(\mathbb{A}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{i,j} \det\left(\mathbb{A}^{[i,j]}\right). \tag{B.21}$$

*Le terme $(-1)^{i+j} \det\left(\mathbb{A}^{[i,j]}\right)$ est appellé le **cofacteur** du terme $A_{i,j}$.*

Définition B.2.19. *Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que $\lambda \in \mathbb{C}$ est **valeur propre** de $\mathbb{A}$ s'il existe $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n$ **non nul** tel que*

$$\mathbb{A}\boldsymbol{u} = \lambda \boldsymbol{u}. \tag{B.22}$$

B. Annexes B.2.2 Matrices
B.2. Algèbre linéaire

*Le vecteur $\boldsymbol{u}$ est appelé **vecteur propre** associé à la valeur propre λ.*
*Le couple $(\lambda, \boldsymbol{u})$ est appelé **élément propre** de $\mathbb{A}$.*

Définition B.2.20. *Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de $\mathbb{A}$. Le sous-espace*

$$E_\lambda = \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n : \mathbb{A}\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}\} = \ker(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}) \tag{B.23}$$

*est appelé **sous-espace propre** associé à la valeur propre λ. La dimension de E_λ est appelée **multiplicité géométrique** de la valeur propre λ.*

Définition B.2.21. *Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le polynôme de degré n défini par*

$$\mathcal{P}_{\mathbb{A}}(\lambda) = \det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}) \tag{B.24}$$

*est appellé **polynôme caractéristique** de la matrice $\mathbb{A}$.*

Proposition B.2.5. *Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

- *Les racines complexes du polynôme caractéristique $\mathcal{P}_{\mathbb{A}}$ sont les valeurs propres de la matrice $\mathbb{A}$.*
- *Si la racine λ de $\mathcal{P}_{\mathbb{A}}$ est de multiplicité k, on dit que la valeur propre λ est de **Multiplicité algébrique** k.*
- *La matrice $\mathbb{A}$ possède n valeurs propres distinctes ou non.*

Définition B.2.22. *Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\lambda_i(\mathbb{A})$, $i \in [\![1, n]\!]$, les n valeurs propres de $\mathbb{A}$. Le **spectre** de la matrice $\mathbb{A}$ est le sous-ensemble*

$$\operatorname{Sp}(\mathbb{A}) = \bigcup_{i=1}^{n} \{\lambda_i(\mathbb{A})\} \tag{B.25}$$

du plan complexe.

Proposition B.2.6. *Soient $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a les relations suivantes*

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(\mathbb{A}) &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\mathbb{A}), && \text{(B.26)}\\
\det(\mathbb{A}) &= \prod_{i=1}^{n} \lambda_i(\mathbb{A}), && \text{(B.27)}\\
\operatorname{tr}(\mathbb{A}\mathbb{B}) &= \operatorname{tr}(\mathbb{B}\mathbb{A}), && \text{(B.28)}\\
\operatorname{tr}(\mathbb{A} + \mathbb{B}) &= \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B, && \text{(B.29)}\\
\det(\mathbb{A}\mathbb{B}) &= \det(\mathbb{A})\det(\mathbb{B}) = \det(\mathbb{B}\mathbb{A}), && \text{(B.30)}\\
\det(\mathbb{A}^*) &= \overline{\det(\mathbb{A})}. && \text{(B.31)}
\end{aligned}$$

Définition B.2.23. *Le **rayon spectral** d'une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est le nombre $\geqslant 0$ défini par*

$$\rho(\mathbb{A}) = \max\{|\lambda_i(\mathbb{A})| \,;\, i \in [\![1, n]\!]\}$$

Matrices particulières

Définition B.2.24. *Une matrice carrée $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n$ est :*

- ***diagonale*** *si $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$,*
- ***triangulaire supérieure*** *si $a_{ij} = 0$ pour $i > j$,*
- ***triangulaire inférieure*** *si $a_{ij} = 0$ pour $i < j$,*
- ***triangulaire*** *si elle est triangulaire supérieure ou triangulaire inférieure*
- ***à diagonale dominante*** *si*

$$|a_{ii}| \geqslant \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \ \forall i \in [\![1, n]\!], \tag{B.32}$$

- ***à diagonale strictement dominante*** *si*

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \ \forall i \in [\![1, n]\!]. \tag{B.33}$$

Proposition B.2.7. *Soient $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaires inférieures (resp. triangulaires supérieures). Alors la matrice $\mathbb{A}\mathbb{B}$ est aussi triangulaire inférieure (resp. triangulaire supérieure).*
De plus on a

$$(\mathbb{A}\mathbb{B})_{i,i} = A_{i,i}B_{i,i}, \ \forall i \in [\![1, n]\!].$$

Preuve. (voir Exercice 2.3.8, page 248) □

Proposition B.2.8. *Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire inférieure (resp. triangulaire supérieure).*

a. $\mathbb{A}$ est inversible si et seulement si ses éléments diagonaux sont tous non nuls (i.e. $A_{i,i} \neq 0$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$).

b. Si $\mathbb{A}$ est inversible alors son inverse est triangulaire inférieure (resp. triangulaire supérieure) et

$$(\mathbb{A}^{-1})_{i,i} = \frac{1}{(\mathbb{A})_{i,i}}$$

Preuve. (voir Exercice 2.3.18, page 260) □

Définition B.2.25. *On appelle* **matrice bande** *une matrice $\mathbb{A}$ telle que $a_{ij} \neq 0$ pour $|j - i| \leqslant c$.*
c est la ***demi largeur de bande****.*
Lorsque $c = 1$, la matrice est dite ***tridiagonale*** *. Lorsque $c = 2$, la matrice est dite* ***pentadiagonale*** *.*

Définition B.2.26. *On appelle* ***sous-matrice*** *d'une matrice donnée, la matrice obtenue en supprimant certaines lignes et certaines colonnes. En particulier, si on supprime les $(n-k)$ dernières lignes et colonnes d'une matrice carrée $\mathbb{A}$ d'ordre n, on obtient la* ***sous matrice principale*** *d'ordre k.*

B. Annexes B.2. Algèbre linéaire B.2.2 Matrices

Définition B.2.27. *On appelle* ***matrice bloc*** *une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{N,M}$ écrite sous la forme*

$$\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbb{A}_{1,1} & \cdots & \mathbb{A}_{1,q} \\ \hline \vdots & & \vdots \\ \hline \mathbb{A}_{p,1} & \cdots & \mathbb{A}_{p,q} \end{array}\right)$$

où $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $\forall j \in [\![1, q]\!]$, $\mathbb{A}_{i,j}$ est une matrice de $\mathcal{M}_{n_i,m_j}$. On a $N = \sum_{i=1}^{p} n_i$ et $M = \sum_{j=1}^{q} m_j$.
On dit que $\mathbb{A}$ et une matrice ***bloc-carrée*** *si $p = q$ et si tous les blocs diagonaux sont des matrices carrées.*

Propriété B.2.1 (Multiplication de matrices blocs)**.** *Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{N,M}$ et $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{M,S}$. Le produit $\mathbb{P} = \mathbb{A}\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{N,S}$ peut s'écrire sous forme bloc si les matrices $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ sont compatibles par blocs : il faut que le nombre de blocs colonne de $\mathbb{A}$ soit égale au nombre de blocs ligne de $\mathbb{B}$ avec correspondance des dimensions.*

$$\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbb{A}_{1,1} & \cdots & \mathbb{A}_{1,q} \\ \hline \vdots & & \vdots \\ \hline \mathbb{A}_{p,1} & \cdots & \mathbb{A}_{p,q} \end{array}\right) \quad \text{et} \quad \mathbb{B} = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbb{B}_{1,1} & \cdots & \mathbb{A}_{1,r} \\ \hline \vdots & & \vdots \\ \hline \mathbb{B}_{q,1} & \cdots & \mathbb{A}_{q,r} \end{array}\right)$$

avec $\mathbb{A}_{i,k} \in \mathcal{M}_{n_i,m_k}$ et $\mathbb{B}_{k,j} \in \mathcal{M}_{m_k,s_j}$ pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $k \in [\![1, q]\!]$ et $j \in [\![1, r]\!]$. La matrice produit $\mathbb{P}$ s'écrit alors sous la forme bloc

$$\mathbb{P} = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbb{P}_{1,1} & \cdots & \mathbb{P}_{1,r} \\ \hline \vdots & & \vdots \\ \hline \mathbb{P}_{p,1} & \cdots & \mathbb{P}_{p,r} \end{array}\right)$$

avec $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $\forall j \in [\![1, r]\!]$ $\mathbb{P}_{i,j} \in \mathcal{M}_{n_i,s_j}$ et

$$\mathbb{P}_{i,j} = \sum_{k=1}^{q} \mathbb{A}_{i,k}\mathbb{B}_{k,j}.$$

Définition B.2.28. *On dit qu'une matrice bloc-carrée $\mathbb{A}$ est* ***triangulaire inférieure*** *(resp.* ***supérieure****)* ***par blocs*** *si elle peut s'écrire sous la forme d'une matrice bloc avec les sous matrices $\mathbb{A}_{i,j} = 0$ pour $i < j$ (resp. $i > j$). . Elle s'écrit donc sous la forme*

$$\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \mathbb{A}_{1,1} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{A}_{n,1} & \cdots & \cdots & \mathbb{A}_{n,n} \end{array}\right) \quad \left(\text{resp. } \mathbb{A} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \mathbb{A}_{1,1} & \cdots & \cdots & \mathbb{A}_{n,1} \\ \hline \mathbb{O} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hline \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{A}_{n,n} \end{array}\right)\right).$$

Définition B.2.29. *On dit qu'une matrice bloc-carrée $\mathbb{A}$ est* ***diagonale par blocs*** *ou* ***bloc-diagonale*** *si elle peut s'écrire sous la forme d'une matrice bloc avec les sous matrices $\mathbb{A}_{i,j} = 0$ pour $i \neq j$. Elle s'écrit donc sous la forme*

$$\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \mathbb{A}_{1,1} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{A}_{n,n} \end{array}\right)$$

Proposition B.2.9. *Soit $\mathbb{A}$ une matrice bloc-carré décomposée en $n \times n$ blocs. Si $\mathbb{A}$ est* ***bloc-diagonale*** *ou* ***triangulaire par blocs*** *alors son déterminant est le produit des déterminant des blocs diagonaux :*

$$\det \mathbb{A} = \prod_{i=1}^{n} \det \mathbb{A}_{i,i} \tag{B.34}$$

Proposition B.2.10. *Soit $\mathbb{A}$ une matrice bloc-carré* ***inversible*** *décomposée en $n \times n$ blocs.*

- *Si $\mathbb{A}$ est* ***bloc-diagonale*** *alors son inverse (décomposée en $n \times n$ blocs) est aussi* ***bloc-diagonale****.*
- *Si $\mathbb{A}$ est* ***triangulaire inférieure par blocs*** *(resp. supérieure) alors son inverse (décomposée en $n \times n$ blocs) est aussi* ***triangulaire inférieure par blocs*** *(resp. supérieure).*

Dans ces deux cas les blocs diagonaux de la matrice inverse sont les inverses des blocs diagonaux de $\mathbb{A}$. On a donc

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_{1,1} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \cdots & \circ & \mathbb{A}_{n,n} \end{pmatrix} \text{ et } \mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_{1,1}^{-1} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{A}_{n,n}^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_{1,1} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbb{O} \\ \mathbb{A}_{n,1} & \cdots & \cdots & \mathbb{A}_{n,n} \end{pmatrix} \text{ et } \mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_{1,1}^{-1} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} \\ \bullet & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbb{O} \\ \bullet & \cdots & \bullet & \mathbb{A}_{n,n}^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_{1,1} & \cdots & \cdots & \mathbb{A}_{n,1} \\ \mathbb{O} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{A}_{n,n} \end{pmatrix} \text{ et } \mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_{1,1}^{-1} & \bullet & \cdots & \bullet \\ \mathbb{O} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \bullet \\ \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{A}_{n,n}^{-1} \end{pmatrix}$$

B.2.3 Normes vectorielles et normes matricielles

Définition B.2.30. *Une* ***norme*** *sur un espace vectoriel V est une application $\|\bullet\| : V \to \mathbb{R}^+$ qui vérifie les propriétés suivantes*

- ◇ $\|\boldsymbol{v}\| = 0 \iff \boldsymbol{v} = 0$,
- ◇ $\|\alpha \boldsymbol{v}\| = |\alpha| \, \|\boldsymbol{v}\|, \ \forall \alpha \in \mathbb{K}, \ \forall \boldsymbol{v} \in V$,
- ◇ $\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\| \leqslant \|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|, \ \forall (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in V^2$ *(inégalité triangulaire).*

Une norme sur V est également appelée ***norme vectorielle*** *. On appelle* ***espace vectoriel normé*** *un espace vectoriel muni d'une norme.*

B. Annexes
B.2.3 Normes vectorielles et normes matricielles
B.2. Algèbre linéaire

Les trois normes suivantes sont les plus couramment utilisées :

$$\|\boldsymbol{v}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |v_i|$$
$$\|\boldsymbol{v}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^2 \right)^{1/2}$$
$$\|\boldsymbol{v}\|_\infty = \max_i |v_i| \, .$$

Théorème B.2.2. *Soit V un espace de dimension finie. Pour tout nombre réel $p \geqslant 1$, l'application $\|\bullet\|_p$ définie par*

$$\|\boldsymbol{v}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^p \right)^{1/p}$$

est une norme.

Proposition B.2.11. *Pour $p > 1$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n$*

$$\sum_{i=1}^{n} |u_i v_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |u_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^q \right)^{1/q} = \|\boldsymbol{u}\|_p \, \|\boldsymbol{v}\|_q \, . \tag{B.35}$$

*Cette inégalité s'appelle l'****inégalité de Hölder****.*

Définition B.2.31. *Deux* ***normes*** *$\|\bullet\|$ et $\|\bullet\|'$, définies sur un même espace vectoriel V, sont* ***équivalentes*** *s'il exite deux constantes C et C' telles que*

$$\|\boldsymbol{v}\|' \leqslant C \, \|\boldsymbol{v}\| \quad \text{et} \quad \|\boldsymbol{v}\| \leqslant C' \, \|\boldsymbol{v}\|' \quad \text{pour tout } \boldsymbol{v} \in V. \tag{B.36}$$

Proposition B.2.12. *Sur un espace vectoriel de dimension finie toutes les normes sont équivalentes.*

Définition B.2.32. *Une* ***norme matricielle*** *sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une application $\|\bullet\| : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{R}^+$ vérifiant*

a. $\|\mathbb{A}\| = 0 \iff \mathbb{A} = 0$,

b. $\|\alpha \mathbb{A}\| = |\alpha| \, \|\mathbb{A}\|, \ \forall \alpha \in \mathbb{K}, \ \forall \mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

c. $\|\mathbb{A} + \mathbb{B}\| \leqslant \|\mathbb{A}\| + \|\mathbb{B}\|, \ \forall (\mathbb{A}, \mathbb{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ *(inégalité triangulaire)*

d. $\|\mathbb{A}\mathbb{B}\| \leqslant \|\mathbb{A}\| \, \|\mathbb{B}\|, \ \forall (\mathbb{A}, \mathbb{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$

Proposition B.2.13. *Etant donné une norme vectorielle $\|\bullet\|$ sur $\mathbb{K}^n$, l'application $\|\bullet\|_s : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{R}^+$ définie par*

$$\|\mathbb{A}\|_s = \sup_{\substack{\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n \\ \boldsymbol{v} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} = \sup_{\substack{\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n \\ \|\boldsymbol{v}\| \leqslant 1}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| = \sup_{\substack{\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n \\ \|\boldsymbol{v}\| = 1}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \, , \tag{B.37}$$

est une norme matricielle, appelée ***norme matricielle subordonnée*** *(à la norme vectorielle donnée).*
De plus

$$\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \leqslant \|\mathbb{A}\|_s \, \|\boldsymbol{v}\| \ \ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n \tag{B.38}$$

et la norme $\|\mathbb{A}\|$ peut se définir aussi par

$$\|\mathbb{A}\|_s = \inf\left\{\alpha \in \mathbb{R} : \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \leqslant \alpha\,\|\boldsymbol{v}\|\,,\ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n\right\}. \tag{B.39}$$

Il existe au moins un vecteur $\boldsymbol{u} \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$\boldsymbol{u} \neq 0 \quad et \quad \|\mathbb{A}\boldsymbol{u}\| = \|\mathbb{A}\|_s\,\|\boldsymbol{u}\|. \tag{B.40}$$

Enfin une norme subordonnée vérifie toujours

$$\|\mathbb{I}\|_s = 1 \tag{B.41}$$

Théorème B.2.3. *Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On a*

$$\|\mathbb{A}\|_1 \overset{déf.}{=} \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{C}^n\\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|_1}{\|\boldsymbol{v}\|_1} = \max_{j\in[\![1,n]\!]} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \tag{B.42}$$

$$\|\mathbb{A}\|_2 \overset{déf.}{=} \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{C}^n\\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|_2}{\|\boldsymbol{v}\|_2} = \sqrt{\rho\left(\mathbb{A}^*\mathbb{A}\right)} = \sqrt{\rho\left(\mathbb{A}\mathbb{A}^*\right)} = \|\mathbb{A}^*\|_2 \tag{B.43}$$

$$\|\mathbb{A}\|_\infty \overset{déf.}{=} \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{C}^n\\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|_\infty}{\|\boldsymbol{v}\|_\infty} = \max_{i\in[\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \tag{B.44}$$

La norme $\|\bullet\|_2$ est invariante par transformation unitaire :

$$\mathbb{U}\mathbb{U}^* = \mathbb{I} \Longrightarrow \|\mathbb{A}\|_2 = \|\mathbb{A}\mathbb{U}\|_2 = \|\mathbb{U}\mathbb{A}\|_2 = \|\mathbb{U}^*\mathbb{A}\mathbb{U}\|_2\,. \tag{B.45}$$

Par ailleurs, si la matrice $\mathbb{A}$ est normale :

$$\mathbb{A}\mathbb{A}^* = \mathbb{A}^*\mathbb{A} \Longrightarrow \|\mathbb{A}\|_2 = \rho(\mathbb{A}). \tag{B.46}$$

Proposition B.2.14. *a. Si une matrice $\mathbb{A}$ est hermitienne, ou symétrique (donc normale), on a $\|\mathbb{A}\|_2 = \rho(\mathbb{A})$.*

b. Si une matrice $\mathbb{A}$ est unitaire, ou orthogonale (donc normale), on a $\|\mathbb{A}\|_2 = 1$.

Théorème B.2.4. *a. Soit $\mathbb{A}$ une matrice carrée quelconque et $\|\bullet\|$ une norme matricielle subordonnée ou non, quelconque. Alors*

$$\rho(\mathbb{A}) \leqslant \|\mathbb{A}\|\,. \tag{B.47}$$

b. Etant donné une matrice $\mathbb{A}$ et un nombre $\varepsilon > 0$, il existe au moins une norme matricielle subordonnée telle que

$$\|\mathbb{A}\| \leqslant \rho(\mathbb{A}) + \varepsilon. \tag{B.48}$$

Théorème B.2.5. *L'application $\|\bullet\|_E : \mathcal{M}_n \to \mathbb{R}^+$ définie par*

$$\|\mathbb{A}\|_E = \left(\sum_{(i,j)=\in[\![1,n]\!]^2} |a_{ij}|^2\right)^{1/2} = \sqrt{\operatorname{tr}\left(\mathbb{A}^*\mathbb{A}\right)}, \tag{B.49}$$

pour toute matrice $\mathbb{A} = (a_{ij})$ d'ordre n, est une norme matricielle non subordonnée (pour $n \geqslant 2$), invariante par transformation unitaire et qui vérifie

$$\|\mathbb{A}\|_2 \leqslant \|\mathbb{A}\|_E \leqslant \sqrt{n}\,\|\mathbb{A}\|_2\,,\ \forall \mathbb{A} \in \mathcal{M}_n. \tag{B.50}$$

De plus $\|\mathbb{I}\|_E = \sqrt{n}$.

Théorème B.2.6. *a. Soit $\|\bullet\|$ une norme matricielle subordonnée, et $\mathbb{B}$ une matrice vérifiant*

$$\|\mathbb{B}\| < 1.$$

Alors la matrice $(\mathbb{I} + \mathbb{B})$ est inversible, et

$$\left\|(\mathbb{I} + \mathbb{B})^{-1}\right\| \leqslant \frac{1}{1 - \|\mathbb{B}\|}.$$

b. Si une matrice de la forme $(\mathbb{I} + \mathbb{B})$ est singulière, alors nécessairement

$$\|\mathbb{B}\| \geqslant 1$$

pour toute norme matricielle, subordonnée ou non.

B.2.4 Réduction des matrices

Définition B.2.33. *Soit $A : V \to V$ une application linéaire, représenté par une matrice carrée $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n$ relativement à une base $\{\boldsymbol{e}_i\}_{i\in[\![1,n]\!]}$. Relativement à une autre base $\{\boldsymbol{f}_i\}_{i\in[\![1,n]\!]}$, la même application est représentée par la matrice*

$$\mathbb{B} = \mathbb{P}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{P} \tag{B.51}$$

où $\mathbb{P}$ est la matrice inversible dont le j-ème vecteur colonne est formé des composantes du vecteur $\boldsymbol{f}_j$ dans la base $\{\boldsymbol{e}_i\}_{i\in[\![1,n]\!]}$:

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{f}_1\rangle & \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{f}_2\rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{f}_n\rangle \\ \langle \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{f}_1\rangle & \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{f}_2\rangle & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \langle \boldsymbol{e}_{n-1}, \boldsymbol{f}_n\rangle \\ \langle \boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{f}_1\rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{f}_{n-1}\rangle & \langle \boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{f}_n\rangle \end{pmatrix} \tag{B.52}$$

*La matrice $\mathbb{P}$ est appelée **matrice de passage de la base** $\{\boldsymbol{e}_i\}_{i\in[\![1,n]\!]}$ **dans le base** $\{\boldsymbol{f}_i\}_{i\in[\![1,n]\!]}$.*

Définition B.2.34. *On dit que la matrice carrée $\mathbb{A}$ est diagonalisable s'il existe une matrice inversible $\mathbb{P}$ telle que la matrice $\mathbb{P}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{P}$ soit diagonale.*

Remarque B.2.1. *On notera que, dans le cas où $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n$ est diagonalisable, les éléments diagonaux de la matrice $\mathbb{P}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{P}$ sont les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ de la matrice $\mathbb{A}$, et que le j-ème vecteur colonne $\boldsymbol{p}_j$ de la matrice $\mathbb{P}$ est formé des composantes, dans la même base que $\mathbb{A}$, d'un vecteur propre associé à la valeur propre λ_j. On a*

$$\mathbb{P}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{P} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \Longleftrightarrow \mathbb{A}\boldsymbol{p}_j = \lambda_j \boldsymbol{p}_j,\ \forall j \in [\![1, n]\!]. \tag{B.53}$$

C'est à dire qu'une matrice est diagonalisable si, et seulement si, il existe une base de vecteurs propres.

Théorème B.2.7. *a. Etant donnée une matrice **carrée** $\mathbb{A}$, il existe une matrice **unitaire** $\mathbb{U}$ telle que la matrice $\mathbb{U}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{U}$ soit **triangulaire**.*

*b. Etant donnée une matrice **normale** $\mathbb{A}$, il existe une matrice **unitaire** $\mathbb{U}$ telle que la matrice $\mathbb{U}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{U}$ soit **diagonale**.*

*c. Etant donnée une matrice **symétrique** $\mathbb{A}$, il existe une matrice **orthogonale** $\mathbb{O}$ telle que la matrice $\mathbb{O}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{O}$ soit **diagonale**.*

B.2.5 Suites de vecteurs et de matrices

Définition B.2.35. *Soit V un espace vectoriel muni d'une norme $\|\bullet\|$, on dit qu'une suite $(\boldsymbol{v}_k)$ d'éléments de V* ***converge vers un élément*** *$\boldsymbol{v} \in V$, si*

$$\lim_{k\to\infty} \|\boldsymbol{v}_k - \boldsymbol{v}\| = 0$$

et on écrit

$$\boldsymbol{v} = \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{v}_k.$$

Théorème B.2.8. *Soit $\mathbb{B}$ une matrice carrée. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a. $\lim_{k\to\infty} \mathbb{B}^k = 0$,

b. $\lim_{k\to\infty} \mathbb{B}^k \boldsymbol{v} = 0$ *pour tout vecteur* $\boldsymbol{v}$,

c. $\rho(\mathbb{B}) < 1$,

d. $\|\mathbb{B}\| < 1$ *pour au moins une norme matricielle subordonnée* $\|\bullet\|$.

Théorème B.2.9. *Soit $\mathbb{B}$ une matrice carrée, et $\|\bullet\|$ une norme matricielle quelconque. Alors*

$$\lim_{k\to\infty} \left\|\mathbb{B}^k\right\|^{1/k} = \rho(\mathbb{B}).$$

B.3 Receuil d'exercices

B.3.1 Algorithmique numérique

Exercice 2.3.1

Soient $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ et $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$.

Q. 1 *Ecrire une fonction* dot *permettant de calculer le produit scalaire du vecteur $\boldsymbol{u}$ par $\boldsymbol{v}$, noté mathématiquement par $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$.*

Q. 2 *Ecrire une fonction* norm2 *permettant de calculer la norme euclidienne du vecteur $\boldsymbol{u}$ donnée par $\|\boldsymbol{u}\|_2 \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle}$.*

Soient a et b deux réels.

Q. 3 *Ecrire une fonction* aUpbV *permettant de calculer le vecteur $\boldsymbol{w} \stackrel{\text{def}}{=} a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v}$.*

Q. 4 *Ecrire un programme algorithmique permettant de calculer $\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|_2$ avec $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$*

Correction