Ing. MACS 1 **2025-2026**

Analyse Numérique I : Rappels [*]

1 Analyse

1.1 En vrac

Théorème 1.1 (Théorème de Rolle)**.** *Soient a, b deux réels, $a < b$, et, $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que*
— *f est continue sur $[a, b]$,*
— *f est dérivable sur $]a, b[$,*
— *$f(a) = f(b)$.*
Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème 1.2 (Théorème de Bolzano ou des valeurs intermédiaires)**.** *Soit $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Si $f(a)$ et $f(b)$ ne sont pas de même signe (i.e. $f(a)f(b) < 0$) alors il existe au moins $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.*

Théorème 1.3 (Théorème des accroissements finis)**.** *Soient a et b deux réels, $a < b$ et f une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$, dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$. Alors il existe $\xi \in]a, b[$ tel que*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Proposition 1.4 (Formule de Taylor-Lagrange d'ordre n)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{C}^n([a, b])$ dont la dérivée n-ième est dérivable sur $]a, b[$. Alors*

- *pour tout x, y dans $[a, b]$, $x \neq y$, il existe $\xi \in]\min(x, y), \max(x, y)[$ tel que*

$$f(x) = f(y) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(x-y)^k}{k!} f^{(k)}(y) + \frac{(x-y)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \tag{1}$$

- *$\forall t \in [a, b]$, $\forall h \in \mathbb{R}^*$ vérifiant $(t + h) \in [a, b]$, il existe $\xi \in]\min(t, t + h), \max(t, t + h)[$ tel quel*

$$f(t+h) = f(t) + \sum_{k=1}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(t) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \tag{2}$$

Définition 1.5. *Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \mathbb{R}$. On dit que f est **dominée** par g au voisinage de a, si, au voisinage de a, il existe une fonction θ bornée telle que $f = \theta g$. Dans ce cas, on dit aussi que f **se comporte comme un grand O de** g au voisinage de a et on note alors $f \overset{a}{=} \mathcal{O}(g)$.*

Définition 1.6. *Soit f une fonction définie au voisinage de 0. On dit que $f(h)$ **se comporte comme un grand O de** h^p (au voisinage de 0) si f est dominée par $h \mapsto h^p$ au voisinage de 0 et on note alors $f(h) = \mathcal{O}(h^p)$.*

[*]. auteur : F. Cuvelier. Compilé le 6 octobre 2025 à 7 h 49.

Proposition 1.7 (Formule de Taylor-Landau d'ordre n). *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *et* $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b])$*, alors* $\forall t \in [a,b]$*,* $\forall h \in \mathbb{R}^*$ *vérifiant* $(t+h) \in [a,b]$*, il existe* $\xi \in]\min(t,t+h), \max(t,t+h)[$ *tel quel*

$$f(t+h) = f(t) + \sum_{k=1}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(t) + \mathcal{O}(h^{n+1}) \tag{3}$$

Corollaire 1.8 (Théorème de la bijection). *Si* f *est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle* $[a,b]$ *et à valeurs réelles, alors elle constitue une bijection entre* $[a,b]$ *et l'intervalle fermé dont les bornes sont* $f(a)$ *et* $f(b)$.

Proposition 1.9. *Soit* f *est une fonction bijective continue d'un intervalle ouvert* $I \subset \mathbb{R}$ *sur un intervalle ouvert* $J \subset \mathbb{R}$*. Si* f *est dérivable en* $\alpha \in I$ *et que* $f'(\alpha) \neq 0$ *alors sa réciproque* f^{-1} *est dérivable en* $\beta = f(\alpha) \in J$ *et*

$$(f^{-1})'(\beta) = \frac{1}{f'(\alpha)} \quad \textit{ou encore} \quad (f^{-1})'(\beta) = \frac{1}{f'(f^{-1}(\beta))}$$

1.2 Espace métrique [†]

Définition 1.10 (Distance sur un ensemble). *On appelle* ***distance*** *sur un ensemble* E*, une application* d *de* E^2 *dans* $\mathbb{R}_+$ *telle que pour tout* $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in E^3$ *on a*

- *symétrie :* $\mathrm{d}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \mathrm{d}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$,
- *séparation :* $\mathrm{d}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0 \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$,
- *inégalité triangulaire :* $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) \leqslant \mathrm{d}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \mathrm{d}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$

Voici quelques exemples de distances :
— $\mathrm{d}(x,y) = |x-y|$ dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$
— $\mathrm{d}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$ dans $\mathbb{R}^n$, où $\|.\|$ est l'une quelconque des normes habituelles.

Définition 1.11 (Espace métrique). *Un ensemble* E *muni d'une distance* d *est appelé* ***espace métrique*** *et on le note* (E,d).

Soient (E,d) un espace métrique, $\boldsymbol{a} \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+$. On appelle

- **boule ouverte** de centre $\boldsymbol{a}$ et de rayon r l'ensemble

$$\mathcal{B}(\boldsymbol{a},r) = \left\{\boldsymbol{x} \in E;\ \mathrm{d}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}) < r\right\},$$

- **boule fermée** de centre $\boldsymbol{a}$ et de rayon r l'ensemble

$$\overline{\mathcal{B}(\boldsymbol{a},r)} = \left\{\boldsymbol{x} \in E;\ \mathrm{d}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}) \leqslant r\right\},$$

- **sphere** de centre $\boldsymbol{a}$ et de rayon r l'ensemble

$$\mathcal{S}(\boldsymbol{a},r) = \left\{\boldsymbol{x} \in E;\ \mathrm{d}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}) = r\right\},$$

Une partie $A \subset E$ est dites **bornée** si

$$\exists \boldsymbol{x} \in E,\ \exists R \in \mathbb{R}_+^*,\quad A \subset \mathcal{B}(\boldsymbol{x},R).$$

†. En grande partie extrait du site bibmat

1.2.1 Suites

Définition 1.12 (Suite convergente)**.** *Soient* (E, d) *un* ***espace métrique*** *et* $(\boldsymbol{u}^{[k]})_{k\in\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* E*. On dit que la suite* $(\boldsymbol{u}^{[k]})_{k\in\mathbb{N}}$ *converge si*

$$\exists \boldsymbol{\alpha} \in E,\ \forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall k > N, \quad \mathrm{d}(\boldsymbol{u}^{[k]}, \boldsymbol{\alpha}) < \epsilon. \tag{4}$$

Dans ce cas on dit que la suite $(\boldsymbol{u}^{[k]})_{k\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $\boldsymbol{\alpha} \in E$*.*

Une suite qui ne converge vers aucun $\boldsymbol{\alpha} \in E$ est dites **divergente** et vérifie

$$\forall \boldsymbol{\alpha} \in E,\ \exists \epsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists k > N, \quad \mathrm{d}(\boldsymbol{u}^{[k]}, \boldsymbol{\alpha}) \geqslant \epsilon.$$

Si la suite $(\boldsymbol{u}^{[k]})$ de E converge vers α (nécessairement unique dans E) alors on dit que $\boldsymbol{\alpha}$ est la **limite** de $(\boldsymbol{u}^{[k]})$ et on note

$$\lim_{k\to+\infty} \boldsymbol{u}^{[k]} = \boldsymbol{\alpha} \ \text{ ou } \ \boldsymbol{u}^{[k]} \underset{k\to+\infty}{=} \boldsymbol{\alpha}.$$

1.2.2 Ouverts et fermés

Soit (E, d) un espace métrique.
Soient $\boldsymbol{x} \in E$ et $V \subset E$. On dit que V est un **voisinage** de $\boldsymbol{x}$ s'il existe $r \in \mathbb{R}^*_+$ tel que $\mathcal{B}(\boldsymbol{x}, r) \subset V$.

On dit que $U \subset E$ est un **ouvert** de E si elle est voisinage de tous ses points :

$$\forall \boldsymbol{x} \in U,\ \exists r \in \mathbb{R}^*_+,\ \mathcal{B}(\boldsymbol{x}, r) \subset U \tag{5}$$

Proposition 1.13.
- *E et $\varnothing$ sont des ouverts,*
- *une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert,*
- *une intersection finie d'ouverts est un ouvert.*

On dit que $U \subset E$ est un **fermé** de E si son complémentaire est un ouvert de E.

Proposition 1.14.
- *E et $\varnothing$ sont des fermés,*
- *une réunion finie de fermés est un fermé,*
- *une intersection quelconque de fermés est un fermé.*

Soit $A \subset E$.

- On dit que $\boldsymbol{x} \in E$ est un **point intérieur** de A si
$$\exists r \in \mathbb{R}^*_+,\ \mathcal{B}(\boldsymbol{x}, r) \subset A.$$
On appelle **intérieur de** A et on note $\mathring{A}$ l'ensemble des points intérieurs de A.
L'ensemble $\mathring{A}$ est un ouvert : c'est le plus grand ouvert contenu dans A.
- On dit que $\boldsymbol{x} \in E$ est un **point adhérent** à A si
$$\forall r \in \mathbb{R}^*_+,\ \mathcal{B}(\boldsymbol{x}, t) \cap A \neq \varnothing.$$
On appelle **adhérence de** A et on note $\overline{A}$ l'ensemble des points adhérents de A. L'ensemble $\overline{A}$ est un fermé : c'est le plus petit fermé contenant A.

Théorème 1.15. *Soient $A \subset E$ et $\boldsymbol{x} \in E$.*
- *$\boldsymbol{x} \in \overline{A}$ si et seulement s'il existe une suite $(\boldsymbol{u}^{[k]})$ de A qui converge vers $\boldsymbol{x}$.*
- *A est fermé si et seulement si, pour toute suite $(\boldsymbol{u}^{[k]})$ de A qui converge vers $\boldsymbol{\alpha} \in E$, alors $\boldsymbol{\alpha} \in A$.*

Définition 1.16. *Une partie $K \subset E$ est dites* ***compacte*** *si, de toute suite $(\boldsymbol{u}^{[k]})$ de K, on peut extraire une sous-suite convergente vers un élement de K.*

- toute réunion finie de compacts est compacte,
- toute intersection quelconque de compacts est compacte,
- toute partie compacte de E est fermée et bornée.

1.2.3 Limites et continuité

Soient (E, d) et (F, d) deux espaces métriques, et $f : E \longrightarrow F$ une fonction. Soit $\boldsymbol{\alpha} \in E$. on dit que f **admet une limite** en $\boldsymbol{\alpha}$ si

$$\exists \boldsymbol{\beta} \in F,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall \boldsymbol{x} \in E,\ \Big(\mathrm{d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\alpha}) < \delta \ \Rightarrow\ \mathrm{d}(f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{\beta}) < \varepsilon \Big) \tag{6}$$

Cette limite, si elle existe, est nécessairement unique, égale à $\boldsymbol{\beta}$, et on note alors

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{\alpha}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\beta} \quad \text{ou} \quad f(\boldsymbol{x}) \underset{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{\alpha}}{\longrightarrow} \boldsymbol{\beta}.$$

Proposition 1.17. *f admet une limite $\boldsymbol{\beta}$ en $\boldsymbol{\alpha}$ si et seulement si pour toute suite $\boldsymbol{u}^{[k]}$ de E qui converge vers $\boldsymbol{\alpha}$, alors la suite $f(\boldsymbol{u}^{[k]})$ de F converge vers $\boldsymbol{\beta}$.*

Définition 1.18. *Soient (E, d) et (F, d) deux espaces métriques, et $f : E \longrightarrow F$ une fonction.*

- *f est **continue en** $\boldsymbol{\alpha} \in E$ si f admet une limite en $\boldsymbol{\alpha}$ (nécessairement égale à $f(\boldsymbol{\alpha})$) ou encore*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall \boldsymbol{x} \in E,\ \Big(\mathrm{d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\alpha}) < \delta \ \Rightarrow\ \mathrm{d}(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{\alpha})) < \varepsilon \Big). \tag{7}$$

- *f est **continue sur** $A \subset E$ si elle est continue en chaque point de A.*

Théorème 1.19. *Soient (E, d) et (F, d) deux espaces métriques, et $f : E \longrightarrow F$ une fonction.*
f est continue en $\boldsymbol{\alpha} \in E$ si et seulement si, pour toute suite $\boldsymbol{u}^{[k]}$ de E qui converge vers $\boldsymbol{\alpha}$, alors la suite $f(\boldsymbol{u}^{[k]})$ de F converge vers $f(\boldsymbol{\alpha})$.

Théorème 1.20. *Soient (E, d) et (F, d) deux espaces métriques, et $f : E \longrightarrow F$ une fonction. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- *f est continue sur E,*
- *L'image réciproque d'un ouvert de F par f est un ouvert de E,*
- *L'image réciproque d'un fermé de F par f est un fermé de E.*

Définition 1.21. *Soient (E, d) et (F, d) deux espaces métriques, et $f : E \longrightarrow F$ une fonction.*
*On dit que f est **Uniformément continue** sur $A \subset E$ si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in A^2,\ \Big(\mathrm{d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) < \delta \ \Rightarrow\ \mathrm{d}(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})) < \varepsilon \Big).$$

Définition 1.22. *Soient (E, d) et (F, d) deux espaces métriques, et $f : E \longrightarrow F$ une fonction.*

- *On dit que f est **Lipschitzienne** de rapport $K \in \mathbb{R}_+$ ou K-**lipschitzienne** sur $A \subset E$ si*

$$\forall (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in A^2,\ \mathrm{d}(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})) \leqslant K\, \mathrm{d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}).$$

- *On dit que f est **contractante** sur $A \subset E$ si elle est **lipschitzienne** de rapport $K \in [0, 1[$ sur $A \subset E$.*

- Toute application lipschitzienne est uniformément continue.
- Toute application uniformément continue est continue.

Les réciproques sont fausses.

Théorème 1.23. *Soient (E, d) et (F, d) deux espaces métriques, K un compact de E, et $f : K \longrightarrow F$. Si f est continue sur K alors $f(K)$ est un compact de F.*

Théorème 1.24 (Théorème de Heine)**.** *Toute fonction continue sur un compact est uniformément continue.*

1.2.4 Suites de Cauchy

Définition 1.25 (Suite de Cauchy)**.** *Soit* (E, d) *un* ***espace métrique****. Une suite* $(\boldsymbol{x}^{[k]})_{k\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* E *est dites* ***de Cauchy*** *si*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{N},\ \textit{tel que}\ \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2,\ p, q \geqslant M,\quad \mathrm{d}(\boldsymbol{x}^{[p]}, \boldsymbol{x}^{[q]}) < \epsilon.$$

ce qui correspond à

$$\lim_{m\to+\infty} \sup_{p,q\geqslant m} \mathrm{d}(\boldsymbol{x}^{[p]}, \boldsymbol{x}^{[q]}) = 0.$$

Une autre manière de l'écrire est

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{N},\ \textit{tel que}\ \forall k \in \mathbb{N},\ k \geqslant M,\ \forall l \in \mathbb{N},\quad \mathrm{d}(\boldsymbol{x}^{[k+l]}, \boldsymbol{x}^{[k]}) < \epsilon.$$

ce qui correspond à

$$\lim_{m\to+\infty} \sup_{k\geqslant m, l\geqslant 0} \mathrm{d}(\boldsymbol{x}^{[k+l]}, \boldsymbol{x}^{[k]}) = 0.$$

Définition 1.26 (Espace métrique complet)**.** *Un espace metrique est dit* ***complet*** *si toute suite de Cauchy converge.*

Proposition 1.27. *Si* E *est un espace vectoriel normé de norme* $\|.\|$ *alors* E *est un espace métrique pour la distance* d *issue de sa norme et définie par* $\mathrm{d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$, $\forall (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in E^2$.

Définition 1.28 (Espace de Banach)**.** *On appelle* ***espace de Banach*** *un espace vectoriel normé complet pour la distance issue de sa norme.*

Par exemple, les espaces vectoriels normés $(\mathbb{R}, |\bullet|)$, $(\mathbb{C}, |\bullet|)$, $(\mathbb{R}^n, \|\bullet\|)$, $(\mathbb{C}^n, \|\bullet\|)$ sont des espaces de Banach. Plus généralement, un espace vectoriel normé de dimension finie est un espace de Banach.

1.2.5 Ordre de convergence

Définition 1.29 (Ordre de convergence)**.** *Soient* (E, d) *un* ***espace métrique*** *et* $(\boldsymbol{u}^{[k]})_{k\in\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* E ***convergeant vers*** $\boldsymbol{\alpha} \in E$ *avec,* $\forall k \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{u}^{[k]} \neq \alpha$.
Soit $p \in [1, +\infty[$. *On dit que cette suite* ***converge vers*** $\boldsymbol{\alpha}$ ***avec un ordre*** p ***au moins*** *si*

$$\exists C > 0,\ \exists k_0 \in \mathbb{N},\quad \textit{tels que}\quad \forall k \geqslant k_0,\quad \mathrm{d}(\boldsymbol{u}^{[k+1]}, \boldsymbol{\alpha}) \leqslant C\, \mathrm{d}(\boldsymbol{u}^{[k]}, \boldsymbol{\alpha})^p. \tag{8}$$

où $C < 1$ *si* $p = 1$.
On dit que cette suite ***converge vers*** $\boldsymbol{\alpha}$ ***avec un ordre*** p *(exactement) si elle converge à l'ordre* p *au moins et si*

$$\forall \varepsilon > 0,\quad \lim_{k\to+\infty} \frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{u}^{[k+1]}, \boldsymbol{\alpha})}{\mathrm{d}(\boldsymbol{u}^{[k]}, \boldsymbol{\alpha})^{p+\varepsilon}} = +\infty. \tag{9}$$

Soient (E, d) un **espace métrique** et $(\boldsymbol{u}^{[k]})_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E **convergeant** vers $\boldsymbol{\alpha} \in E$ avec, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{u}^{[k]} \neq \alpha$.
Soit $p \in [1, +\infty[$.

La suite **converge vers** $\boldsymbol{\alpha}$ **à l'ordre** 1 (exactement) si

$$\exists \mu \in]0, 1[,\quad \text{tel que}\ \lim_{k\to+\infty} \frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{u}^{[k+1]}, \boldsymbol{\alpha})}{\mathrm{d}(\boldsymbol{u}^{[k]}, \boldsymbol{\alpha})} = \mu. \tag{10}$$

Dans ce cas la convergence est dite **linéaire**.

- Si (10) est vérifiée pour $\mu = 0$, alors la convergence est dites **super-linéaire** .
- Si (10) n'est vérifiée pour aucun $\mu \in]0, 1[$, alors la convergence est dites **sous-linéaire**.

La suite **converge vers $\boldsymbol{\alpha}$ à l'ordre** $p > 1$ (exactement) si

$$\exists \mu > 0, \quad \text{tel que } \lim_{k \to +\infty} \frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{u}^{[k+1]}, \boldsymbol{\alpha})}{\mathrm{d}(\boldsymbol{u}^{[k]}, \boldsymbol{\alpha})^p} = \mu. \tag{11}$$

et dans ce cas la convergence est **super-linéaire**.

La convergence d'ordre 2 (resp. 3) est dite **quadratique** (resp. **cubique**).