

Analyse Numérique I : Interpolation¹

1 Polynôme d'interpolation de Lagrange

Définition 1.1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(n + 1)$ couples de $\mathbb{R}^2$, $(x_i, y_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$, tels que les x_i sont distincts deux à deux. Le **polynôme d'interpolation de Lagrange** de $\mathbb{R}_n[X]$, noté P_n , et vérifiant

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad P_n(x_i) = y_i \quad (1)$$

est donné par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(x), \quad (2)$$

où les $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$ sont les **polynômes de base de Lagrange** donnés par

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}. \quad (3)$$

Lemme 1.1. Les **polynômes de base de Lagrange** sont les uniques polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant

$$L_i(x_j) = \delta_{i,j}, \quad \forall (i, j) \in i \in \llbracket 0, n \rrbracket^2. \quad (4)$$

Théorème 1.1. Le **polynôme d'interpolation de Lagrange**, $\mathcal{P}_n$, associé aux $(n + 1)$ couples $(x_i, y_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$, est l'unique polynôme de degré au plus n , vérifiant

$$\mathcal{P}_n(x_i) = y_i, \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket. \quad (5)$$

1.2 Erreur de l'interpolation

Soit une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que les y_i sont donnés par

$$y_i = f(x_i), \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket. \quad (6)$$

On cherche à évaluer l'erreur $E_n(t) = f(x) - \mathcal{P}_n(t)$, $\forall t \in [a, b]$.

Lemme 1.2 (Séparation des zéros d'une fonction). Soient I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $(x_i)_{i=0}^n$ dans I , avec $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, tel que

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad f(x_i) = 0.$$

1. Si $f \in \mathcal{C}^0(I; \mathbb{R})$, avec f dérivable sur I , alors, il existe $(\xi_i)_{i=1}^n$ dans I , avec $x_0 < \xi_1 < x_1 < \xi_2 < x_2 < \dots < \xi_n < x_n$, tel que

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad f^{(1)}(\xi_i) = 0.$$

2. Si $f \in \mathcal{C}^{n-1}(I; \mathbb{R})$, avec $f^{(n-1)}$ dérivable alors il existe $\xi \in]x_0, x_n[$ tel que $f^{(n)}(\xi) = 0$.

¹ auteur: F. Cuvelier. Compilé le 29 novembre 2025 à 5 h 24.

Théorème 1.2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_i)_{i=0}^n$, $(n+1)$ points distincts de l'intervalle $[a, b]$. Soient $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b]; \mathbb{R})$ et $\mathcal{P}_n$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré n passant par $(x_i, f(x_i))$, $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Alors, $\forall x \in [a, b]$, $\exists \xi_x \in (\min(x_i, x), \max(x_i, x))$,

$$f(x) - \mathcal{P}_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i) \quad (7)$$

1.3 Points de Chebyshev

Trouver $(\bar{x}_i)_{i=0}^n$, $\bar{x}_i \in [a, b]$, distincts deux à deux, tels que

$$\max_{t \in [a, b]} \prod_{i=0}^n |t - \bar{x}_i| \leq \max_{t \in [a, b]} \prod_{i=0}^n |t - x_i|, \quad \forall (x_i)_{i=0}^n, x_i \in [a, b], \text{ distincts 2 à 2} \quad (8)$$

On a alors le résultat suivant

Théorème 1.3. Les points réalisant (8) sont les points de Chebyshev donnés par

$$\bar{x}_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{2n+2}\right), \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket. \quad (9)$$

1.4 Stabilité

On note $\Lambda_n = \max_{x \in [a, b]} \sum_{i=0}^n |\mathcal{L}_i(x)|$, dites *Constante de Lebesgue*.

Proposition 1.1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_0, \dots, x_n$ des points distincts de $[a, b]$. L'application $\mathcal{L}_n : \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_n[X]$ qui à toute fonction $f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$ donne le polynôme d'interpolation de Lagrange $\mathcal{P}_n$ associés aux couples de $(x_i, f(x_i))_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est bien définie et linéaire. De plus, en munissant $\mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$ et $\mathbb{R}_n[X]$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$, on a

$$\|\mathcal{L}_n(f)\|_\infty \leq \Lambda_n \|f\|_\infty, \quad (10)$$

ce qui assure la continuité de $\mathcal{L}_n$, et

$$\|\mathcal{L}_n\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R}) \\ f \neq 0}} \frac{\|\mathcal{L}_n(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty} = \Lambda_n. \quad (11)$$

Théorème 1.4. Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$, on a

$$\|f - \mathcal{L}_n(f)\|_\infty \leq (1 + \Lambda_n) \inf_{Q \in \mathbb{R}_n[X]} \|f - Q\|_\infty \quad (12)$$

- Pour les **points équi-distants** $x_i = a + ih$, $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et $h = (b-a)/n$,

$$\Lambda_n \geq \frac{2^n}{4n^2} \quad (13)$$

et le comportement asymptotique

$$\Lambda_n \approx \frac{2^{n+1}}{e \cdot n \ln(n)} \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty \quad (14)$$

- Pour les **points de Tchebychev**,

$$\Lambda_n \leq C \ln(n), \quad \text{avec } C > 0 \quad (15)$$

et le comportement asymptotique

$$\Lambda_n \approx \frac{2}{\pi} \ln(n) \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty \quad (16)$$

2 Polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite

Définition 2.1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_i, y_i, z_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ $(n+1)$ triplets de $\mathbb{R}^3$, où les x_i sont des points distincts deux à deux de $\mathbb{R}$. Le **polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite**, noté H_n , associé aux $(n+1)$ triplets $(x_i, y_i, z_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$, est défini par

$$H_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i A_i(x) + \sum_{i=0}^n z_i B_i(x) \quad (17)$$

avec

$$A_i(x) = (1 - 2(x - x_i)L'_i(x_i))L_i^2(x) \quad \text{et} \quad B_i(x) = (x - x_i)L_i^2(x) \quad (18)$$

où

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Théorème 2.1. Le **polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite**, H_n , associé aux $n+1$ triplets $(x_i, y_i, z_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$, est l'unique polynôme de degré au plus $2n+1$, vérifiant

$$H_n(x_i) = y_i \quad \text{et} \quad H'_n(x_i) = z_i, \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad (19)$$

Théorème 2.2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_0, \dots, x_n$, $n+1$ points distincts de l'intervalle $[a, b]$. Soient $f \in \mathcal{C}^{2n+2}([a, b]; \mathbb{R})$ et H_n le polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite associé aux $n+1$ triplets $(x_i, f(x_i), f'(x_i))_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$. On a alors $\forall x \in [a, b]$, $\exists \xi_x \in (\min(x_i, x), \max(x_i, x))$, tels que

$$f(x) - H_n(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi_x)}{(2n+2)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i)^2 \quad (20)$$