

Analyse Numérique I : Résolution de systèmes linéaires Méthodes itératives¹

Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible et $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$.

On souhaite construire des **matrices d'itérations** $\mathbb{B}$ et des vecteurs $\mathbf{c}$ telles que

$$\mathbf{x}^{[k+1]} = \mathbb{B}\mathbf{x}^{[k]} + \mathbf{c}, \quad k \geq 0, \quad \mathbf{x}^{[0]} \text{ arbitraire}$$

vérifie

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{[k]} = \tilde{\mathbf{x}} \quad \text{avec} \quad \tilde{\mathbf{x}} = \mathbb{A}^{-1}\mathbf{b}$$

3.1 Résultats généraux

Théorème 3.1 (3.4.1 p.112). Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible décomposée sous la forme $\mathbb{A} = \mathbb{M} - \mathbb{N}$ avec $\mathbb{M}$ inversible. On pose

$$\mathbb{B} = \mathbb{M}^{-1}\mathbb{N} \quad \text{et} \quad \mathbf{c} = \mathbb{M}^{-1}\mathbf{b}.$$

Alors la suite définie par

$$\mathbf{x}^{[0]} \in \mathbb{K}^n \quad \text{et} \quad \mathbf{x}^{[k+1]} = \mathbb{B}\mathbf{x}^{[k]} + \mathbf{c}$$

converge vers $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbb{A}^{-1}\mathbf{b}$ quelque soit $\mathbf{x}^{[0]}$ si et seulement si $\rho(\mathbb{B}) < 1$.

Théorème 3.2 (3.4.3 p.115). Soient $\mathbb{A}$ une matrice hermitienne inversible décomposée en $\mathbb{A} = \mathbb{M} - \mathbb{N}$ avec $\mathbb{M}$ inversible et $\mathbb{M}^* + \mathbb{N}$ hermitienne définie positive. On a alors

$$\rho(\mathbb{M}^{-1}\mathbb{N}) < 1 \quad \text{si et seulement si} \quad \mathbb{A} \text{ est définie positive.}$$

3.2 Notations

Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible avec $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, A_{i,i} \neq 0$, et $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$.

On décompose $\mathbb{A}$ sous la forme

$$\mathbb{A} = \mathbb{D} - \mathbb{E} - \mathbb{F} = \begin{pmatrix} \ddots & & -\mathbb{F} \\ & \mathbb{D} & \\ -\mathbb{E} & & \ddots \end{pmatrix}$$

avec $\mathbb{D} = \text{diag}(\mathbb{A})$ inversible, $\mathbb{E}$ triangulaire inférieure à diagonale nulle et $\mathbb{F}$ triangulaire supérieure à diagonale nulle.

3.3 Méthodes classiques

Soit $\mathbf{x}^{[0]} \in \mathbb{C}^n$.

- La méthode itérative de **Jacobi** s'écrit sous forme scalaire

$$\forall k \in \mathbb{N}, \left(\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad x_i^{[k+1]} = \frac{1}{A_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n A_{ij} x_j^{[k]} \right) \right) \quad (1)$$

et sous forme vectorielle

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{x}^{[k+1]} = \mathbb{D}^{-1}(\mathbb{E} + \mathbb{F})\mathbf{x}^{[k]} + \mathbb{D}^{-1}\mathbf{b}. \quad (2)$$

et on note $\mathbb{J} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sa matrice d'itération

$$\mathbb{J} = \mathbb{D}^{-1}(\mathbb{E} + \mathbb{F}) \quad (3)$$

¹ auteur: F. Cuvelier. Compilé le 24 novembre 2025 à 13 h 40.

- La méthode itérative de **Gauss-Seidel** s'écrit sous forme scalaire

$$\forall k \in \mathbb{N}, \left(\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i^{[k+1]} = \frac{1}{A_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} x_j^{[k+1]} - \sum_{j=i+1}^n A_{ij} x_j^{[k]} \right) \right) \quad (4)$$

et sous forme vectorielle

$$\forall k \in \mathbb{N}, \left(\mathbf{x}^{[k+1]} = (\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1} \mathbb{F} \mathbf{x}^{[k]} + (\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1} \mathbf{b} \right). \quad (5)$$

et on note $\mathbb{G} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sa matrice d'itération

$$\mathbb{G} = (\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1} \mathbb{F} \quad (6)$$

- La méthode itérative **S.O.R.** (successive over relaxation) de paramètre $w \in \mathbb{R}$ s'écrit sous forme scalaire

$$\forall k \in \mathbb{N}, \left(\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i^{[k+1]} = \frac{w}{A_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} x_j^{[k+1]} - \sum_{j=i+1}^n A_{ij} x_j^{[k]} \right) + (1-w)x_i^{[k]} \right) \quad (7)$$

et sous forme vectorielle

$$\forall k \in \mathbb{N}, \left(\mathbf{x}^{[k+1]} = \left(\frac{\mathbb{D}}{w} - \mathbb{E} \right)^{-1} \left(\frac{1-w}{w} \mathbb{D} + \mathbb{F} \right) \mathbf{x}^{[k]} + \left(\frac{\mathbb{D}}{w} - \mathbb{E} \right)^{-1} \mathbf{b} \right). \quad (8)$$

et on note $\mathcal{L}_w \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sa matrice d'itération

$$\mathcal{L}_w = \left(\frac{\mathbb{D}}{w} - \mathbb{E} \right)^{-1} \left(\frac{1-w}{w} \mathbb{D} + \mathbb{F} \right). \quad (9)$$

En particulier, on a $\mathcal{L}_1 = \mathbb{G}$.

Avec les notations du Théorème 3.1, on a

- Jacobi : $\mathbb{J} = \mathbb{M}^{-1} \mathbb{N}$ avec $\mathbb{M} = \mathbb{D}$ et $\mathbb{N} = \mathbb{E} + \mathbb{F}$.
- Gauss-Seidel : $\mathbb{G} = \mathbb{M}^{-1} \mathbb{N}$ avec $\mathbb{M} = \mathbb{D} - \mathbb{E}$ et $\mathbb{N} = \mathbb{F}$
- S.O.R. : $\mathcal{L}_w = \mathbb{M}^{-1} \mathbb{N}$ avec $\mathbb{M} = \frac{\mathbb{D}}{w} - \mathbb{E}$ et $\mathbb{N} = \frac{1-w}{w} \mathbb{D} + \mathbb{F}$

Proposition 3.1. Soit $\mathbb{A}$ une matrice inversible telle que tous ses éléments diagonaux soient non nuls. On note $\mathbb{D} = \text{diag}(\mathbb{A})$ et $\mathbb{E}, \mathbb{F}$, les matrices à diagonales nulles respectivement triangulaire inférieure et supérieure telles que $\mathbb{A} = \mathbb{D} - \mathbb{E} - \mathbb{F}$.

La matrice d'itération de la méthode S.O.R., notée $\mathcal{L}_w$, donnée par

$$\mathcal{L}_w = \left(\frac{\mathbb{D}}{w} - \mathbb{E} \right)^{-1} \left(\frac{1-w}{w} \mathbb{D} + \mathbb{F} \right)$$

vérifie

$$\rho(\mathcal{L}_w) \geq |w - 1|. \quad (10)$$

La méthode S.O.R. diverge si $w \in]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$.

Une condition nécessaire de convergence de la méthode S.O.R. est $0 < w < 2$.

Proposition 3.2 (Matrice tridiagonale). Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice tridiagonale (i.e. $A_{i,j} = 0$, si $|i-j| > 1$) d'éléments diagonaux non nuls.

Alors les rayons spectraux des matrices d'itération de Jacobi, $\mathbb{J}$, et de Gauss-Seidel, $\mathcal{L}_1$, vérifient

$$\rho(\mathcal{L}_1) = \rho(\mathbb{J})^2.$$

Proposition 3.3 ([Matrice tridiagonale voir Ciarlet[2006], Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation, Théorème 5.3-5, pages 106 à 109.]). Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice tridiagonale dont les éléments diagonaux sont non nuls. On suppose que les valeurs propres de la matrice d'itération de Jacobi $\mathbb{J}$ sont réelles et que $\rho(\mathbb{J}) < 1$. On note w_0 le paramètre optimal de la méthode S.O.R. vérifiant

$$\rho(\mathcal{L}_{w_0}) = \min_{w \in]0,2[} (\rho(\mathcal{L}_w)).$$

et donné par

$$w_0 = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(\mathbb{J})^2}} > 1. \quad (11)$$

On a alors

$$\rho(\mathcal{L}_{w_0}) = w_0 - 1 \quad \text{et} \quad \rho(\mathcal{L}_{w_0}) \leq \rho(\mathcal{L}_1) = \rho(\mathbb{J})^2 < \rho(\mathbb{J}).$$

Théorème 3.3 (voir Lascaux-Théodor, vol.2, Théorème 19 et 20, pages 346 à 349). Soit $\mathbb{A}$ une matrice à diagonale strictement dominante ou une matrice inversible à diagonale fortement dominante alors

- la méthode de Jacobi est convergente,
- si $w \in]0,1]$ la méthode S.O.R. est convergente.

Théorème 3.4 (voir Lascaux-Théodor, vol.2, Corollaire 24, page 351). Soit $\mathbb{A}$ une matrice hermitienne définie positive, alors la méthode S.O.R. converge si et seulement si $w \in]0,2[$.