

Analyse Numérique I : Résolution de systèmes non-linéaires *

1 Recherche des zéros d'une fonction

1.1 Méthode de dichotomie ou de bisection

- $a_0 = a, b_0 = b$ et $x_0 = \frac{a+b}{2}$,
- $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} a_{k+1} = b_{k+1} = x_k & \text{si } f(x_k) = 0, \\ a_{k+1} = x_k, b_{k+1} = b_k & \text{si } f(b_k)f(x_k) < 0, \\ a_{k+1} = a_k, b_{k+1} = x_k & \text{sinon (i.e. } f(a_k)f(x_k) < 0). \end{cases}$$

et

$$x_{k+1} = (a_{k+1} + b_{k+1})/2.$$

Proposition 1.1. Soit $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant $f(a)f(b) < 0$ et admettant $\alpha \in]a, b[$ comme **unique** solution de $f(x) = 0$. Alors la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par la méthode de dichotomie converge vers α et

$$|x_k - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^{k+1}}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

On a alors $\forall \epsilon > 0, \forall k \geq \frac{\log(\frac{b-a}{\epsilon})}{\log(2)} - 1$

$$|x_k - \alpha| \leq \epsilon.$$

1.2 Points fixes d'une fonction (dimension 1)

Théorème 1.2 (Théorème du point fixe dans \mathbb{R} (application continue)). Soient $[a, b]$ un intervalle non vide de \mathbb{R} et Φ une application continue de $[a, b]$ dans lui-même. Alors, il existe **au moins** un point $\alpha \in [a, b]$ vérifiant $\Phi(\alpha) = \alpha$. Le point α est appelé **point fixe de la fonction Φ** .

De plus, si Φ est contractante (lipschitzienne de rapport $L \in [0, 1[$), c'est à dire

$$\exists L < 1 \text{ t.q. } |\Phi(x) - \Phi(y)| \leq L|x - y| \quad \forall (x, y) \in [a, b]^2, \quad (1)$$

alors Φ admet un **unique** point fixe $\alpha \in [a, b]$.

Pour tout $x_0 \in [a, b]$, la suite

$$x_{k+1} = \Phi(x_k), \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (2)$$

est bien définie et elle converge vers α avec un ordre 1 au moins.

On a les deux estimations suivantes :

$$|x_k - \alpha| \leq L^k |x_0 - \alpha|, \quad \forall k \geq 0, \quad (3)$$

$$|x_k - \alpha| \leq \frac{L}{1-L} |x_k - x_{k-1}|, \quad \forall k \geq 0, \quad (4)$$

Théorème 1.3 (Théorème du point fixe dans \mathbb{R} (application contractante)). Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé, non vide, et Φ une application contractante de I dans lui-même. Alors, il existe un unique point $\alpha \in I$ vérifiant

*auteur: F. Cuvelier. Compilé le 26 septembre 2025 à 10 h 11.

$\Phi(\alpha) = \alpha$. Le point α est appelé **point fixe de la fonction** Φ . Pour tout $x_0 \in I$, la suite

$$x_{k+1} = \Phi(x_k), \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (5)$$

est bien définie et elle converge vers α avec un ordre 1 au moins.

Théorème 1.4 (Théorème du point fixe dans \mathbb{R} (application \mathcal{C}^1)). Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé, non vide, et $\Phi \in \mathcal{C}^1(I)$ vérifiant $\Phi(I) \subset I$ et

$$\exists L < 1 \text{ tel que } \forall x \in I, |\Phi'(x)| \leq L, \quad (6)$$

Soit $x_0 \in I$ et $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $x_{k+1} = \Phi(x_k)$. On a alors

1. la fonction Φ admet un unique point fixe $\alpha \in I$,
2. $\forall k \in \mathbb{N}, x_k \in I$,
3. la suite (x_k) converge vers α avec un ordre 1 au moins.
4. Si $x_0 \neq \alpha$, alors

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{x_k - \alpha} = \Phi'(\alpha). \quad (7)$$

et, si $\Phi'(\alpha) \neq 0$, la convergence est d'ordre 1 (exactement).

Théorème 1.5 (Convergence locale du point fixe). Soit α un point fixe d'une fonction Φ de classe \mathcal{C}^1 au voisinage de α .

Si $|\Phi'(\alpha)| < 1$, alors il existe $\delta > 0$ pour lequel x_k converge vers α pour tout x_0 tel que $|x_0 - \alpha| \leq \delta$. De plus, si $x_0 \neq \alpha$, on a

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{x_k - \alpha} = \Phi'(\alpha). \quad (8)$$

si $\Phi'(\alpha) \neq 0$, la convergence est d'ordre 1 (exactement).

1.2.1 Points fixes attractifs et répulsifs

Soit $\Phi : [a, b] \rightarrow [a, b]$ une application de classe \mathcal{C}^1 admettant un point fixe $\alpha \in [a, b]$.

- Si $|\Phi'(\alpha)| < 1$ alors α est un point fixe attractif,
- Si $|\Phi'(\alpha)| > 1$ alors α est un point fixe répulsif.

1.2.2 Ordres

Proposition 1.6. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, et $\Phi \in \mathcal{C}^{p+1}(\mathcal{V})$ pour un certain voisinage \mathcal{V} de α point fixe de Φ . Si $\Phi^{(i)}(\alpha) = 0$, pour $1 \leq i \leq p$, alors la méthode de point fixe associée à la fonction Φ est d'ordre $(p+1)$ au moins et

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{(x_k - \alpha)^{p+1}} = \frac{\Phi^{(p+1)}(\alpha)}{(p+1)!}. \quad (9)$$

Elle est d'ordre $(p+1)$ (exactement) si $\Phi^{(p+1)}(\alpha) \neq 0$.

1.2.3 Méthode de la corde

$$x_{k+1} = x_k - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(x_k), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

On pose $\Phi(x) = x - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(x)$, alors $x_{k+1} = \Phi(x_k)$.

Proposition 1.7 (convergence, méthode de la corde). Soit $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$ tel que $f(b) \neq f(a)$ et $\lambda = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. On suppose de plus que $\forall x \in [a, b]$

$$\min(\lambda(x-a), \lambda(x-b)) \leq f(x) \leq \max(\lambda(x-a), \lambda(x-b)) \quad (10)$$

$$\min(0, 2\lambda) < f'(x) < \max(0, 2\lambda) \quad (11)$$

On note $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite donnée par $x_0 \in [a, b]$ et pour tout $k \geq 0$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\lambda}. \quad (12)$$

alors la suite (x_k) est bien définie et converge vers l'unique racine $\alpha \in [a, b]$ de f .

Proposition 1.8 (ordre de convergence de la méthode de la corde). Soit $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$ tel que $f(b) \neq f(a)$. Soit $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite définie par la méthode de la corde

$$x_{k+1} = x_k - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(x_k), \quad \forall k \in \mathbb{N} \text{ avec } x_0 \in [a, b]$$

Si cette suite converge vers $\alpha \in]a, b[$ alors la convergence est au moins d'ordre 1.

De plus, si f est de classe \mathcal{C}^2 sur un certain voisinage \mathcal{V} de α et si $f'(\alpha) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ alors la convergence est au moins d'ordre 2.

1.2.4 Méthode de Newton

Proposition 1.9 (convergence de la méthode de Newton). Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur un certain voisinage d'une racine simple α de f . Soit x_0 donné dans ce voisinage, la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par la méthode de Newton

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (13)$$

est localement convergente d'ordre 2.

1.3 Méthode de la sécante

Alternative à la méthode de Newton lorsque l'on ne connaît pas la dérivée de la fonction f :

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}.$$

Proposition 1.10 (Convergence méthode de la sécante). Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur un certain voisinage d'une racine simple α de f . Soient x_{-1} et x_0 donnés dans ce voisinage tels que $f(x_{-1}) \neq f(x_0)$, la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par la méthode de la sécante

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k), \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (14)$$

est localement convergente d'ordre $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$.

2 Résolution de systèmes non linéaires

Soient $U \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert et $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^0(U; \mathbb{R}^N)$

Trouver $\alpha \in U \subset \mathbb{R}^N$ tel que

$$f(\alpha) = 0 \iff \begin{cases} f_1(\alpha_1, \dots, \alpha_N) = 0 \\ f_2(\alpha_1, \dots, \alpha_N) = 0 \\ \vdots \\ f_N(\alpha_1, \dots, \alpha_N) = 0 \end{cases}$$

On pose, par ex., $\Phi(x) = x + f(x)$,

$$f(x) = 0 \iff \Phi(x) = x$$

Trouver $\alpha \in U \subset \mathbb{R}^N$ tel que

$$\Phi(\alpha) = \alpha \iff \begin{cases} \Phi_1(\alpha_1, \dots, \alpha_N) = \alpha_1 \\ \Phi_2(\alpha_1, \dots, \alpha_N) = \alpha_2 \\ \vdots \\ \Phi_N(\alpha_1, \dots, \alpha_N) = \alpha_N \end{cases}$$

2.1 Point fixe

Théorème 2.1 (Point fixe de Banach). Soit \mathcal{B} un espace de Banach et $U \subset \mathcal{B}$ un sous-ensemble fermé. On suppose que $\Phi : U \rightarrow U$ est une application strictement contractante, i.e.

$$\exists L \in [0, 1[, \quad \|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq L \|x - y\|, \quad \forall (x, y) \in U \times U. \quad (15)$$

Alors

1. Φ admet un unique point fixe $\alpha \in U$ (i.e. unique solution de $x = \Phi(x)$).
2. La suite des itérés $\mathbf{x}^{[k+1]} = \Phi(\mathbf{x}^{[k]})$ converge vers α pour toute valeur initiale $\mathbf{x}^{[0]} \in U$.
3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\|\alpha - \mathbf{x}^{[k]}\| \leq \frac{L^{k-l}}{1-L} \|\mathbf{x}^{[l+1]} - \mathbf{x}^{[l]}\|, \quad 0 \leq l \leq k \quad (16)$$

2.1.1 Méthode de Newton

$f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ une fonction suffisamment régulière. On définit la **matrice Jacobienne de f** , notée \mathbb{J}_f , par

$$\mathbb{J}_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_N}{\partial x_1} & \frac{\partial f_N}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_N}{\partial x_N} \end{pmatrix}$$

Théorème 2.2. Soit $f \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$. On suppose que la matrice Jacobienne appliquée en \mathbf{x} , $\mathbb{J}_f(\mathbf{x})$ est inversible dans un voisinage de α , avec $f(\alpha) = 0$. Alors pour tout $\mathbf{x}^{[0]}$ suffisamment proche de α la suite définie par

$$\mathbf{x}^{[k+1]} = \mathbf{x}^{[k]} - \left((\mathbb{J}_f(\mathbf{x}^{[k]}))^{-1} f(\mathbf{x}^{[k]}) \right)$$

converge vers α et la convergence est d'ordre 2.