

**Proposition** ( ordre de convergence de la méthode de la corde). Soit  $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$  tel que  $f(b) \neq f(a)$ . Soit  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  la suite définie par la méthode de la corde

$$x_{k+1} = x_k - \frac{b - a}{f(b) - f(a)} f(x_k), \quad \forall k \in \mathbb{N} \text{ avec } x_0 \in [a, b]$$

Si cette suite converge vers  $\alpha \in ]a, b[$  alors la convergence est au moins d'ordre 1.

De plus, si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur un certain voisinage  $\mathcal{V}$  de  $\alpha$  et si  $f'(\alpha) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$  alors la convergence est au moins d'ordre 2.

*Proof.* • **Order 1** : On note  $\lambda = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ . On a par définition  $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\lambda}$  (ce qui suppose que  $f(x_k)$  soit bien définie, i.e.  $x_k \in [a, b]$ ). Comme  $\lambda \neq 0$  et  $f$  continue, l'hypothèse  $(x_k)$  converge vers  $\alpha$  entraîne que  $f(\alpha) = 0$ .

Pour définir l'ordre de convergence, on suppose de plus que  $\forall k \in \mathbb{N}, x_k \neq \alpha$ . On peut alors appliquer la formule de Taylor-Lagrange : il existe  $\xi_k$  compris entre  $x_k$  et  $\alpha$  tel que

$$f(x_k) = \underbrace{f(\alpha)}_{=0} + (x_k - \alpha)f'(\xi_k) = (x_k - \alpha)f'(\xi_k).$$

On a alors en utilisant cette expression dans la définition de la suite  $x_k$

$$x_{k+1} = x_k - (x_k - \alpha) \frac{f'(\xi_k)}{\lambda}.$$

En soustrayant  $\alpha$  à cette équation on obtient

$$x_{k+1} - \alpha = x_k - \alpha - (x_k - \alpha) \frac{f'(\xi_k)}{\lambda} = (x_k - \alpha) \left(1 - \frac{f'(\xi_k)}{\lambda}\right).$$

Comme  $x_k \neq \alpha$ , on a alors

$$\frac{x_{k+1} - \alpha}{x_k - \alpha} = 1 - \frac{f'(\xi_k)}{\lambda}.$$

Or  $x_k$  converge vers  $\alpha$  et  $\xi_k$  compris entre  $x_k$  et  $\alpha$ , ce qui entraine que  $\xi_k$  converge vers  $\alpha$ . La fonction  $f'$  étant continue, on en déduit que  $f'(\xi_k)$  converge vers  $f'(\alpha)$ . Ceci donne donc

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|} = \left| 1 - \frac{f'(\alpha)}{\lambda} \right| = \mu.$$

La convergence est donc d'ordre 1 (exactement) si  $\mu \in ]0, 1[$  et au moins d'ordre 1 si  $\mu = 0$ . Si  $f'(\alpha) = 0$ , et donc  $\mu = 1$ , la convergence est sous-linéaire.

- **Order 2 :** La suite étant convergente, il existe  $k_0 \in N$  tel que  $\forall k \geq k_0, x_k \in \mathcal{V}$ . Soit  $k \geq k_0$ , comme  $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{V})$ , on peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange : il existe  $\eta_k \in \mathcal{V}$  compris entre  $x_k$  et  $\alpha$  que

$$f(x_k) = \underbrace{f(\alpha)}_{=0} + (x_k - \alpha)f'(\alpha) + \frac{(x_k - \alpha)^2}{2!}f^{(2)}(\eta_k).$$

On a alors en utilisant cette expression dans la définition de la suite  $x_k$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{1}{\lambda} \left( (x_k - \alpha)f'(\alpha) + \frac{(x_k - \alpha)^2}{2!}f^{(2)}(\eta_k) \right).$$

En soustrayant  $\alpha$  à cette équation on obtient

$$x_{k+1} - \alpha = (x_k - \alpha) \underbrace{\left( 1 - \frac{f'(\alpha)}{\lambda} \right)}_{=0 \text{ par hyp.}} + \frac{1}{\lambda} \frac{(x_k - \alpha)^2}{2!} f^{(2)}(\eta_k).$$

Comme  $\eta_k \in \mathcal{V}$  converge vers  $\alpha$  (car compris entre  $x_k$  et  $\alpha$ ) et  $f^{(2)}$  continue sur  $\mathcal{V}$ , on en déduit

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{(x_k - \alpha)^2} = \frac{|f^{(2)}(\alpha)|}{2|\lambda|}.$$

La convergence est donc (au moins) d'ordre 2.

