

Théorème (Convergence locale de la méthode du point fixe). Soit α un point fixe d'une fonction Φ de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de α . Si $|\Phi'(\alpha)| < 1$, alors il existe $\delta > 0$ pour lequel x_k converge vers α pour tout x_0 tel que $|x_0 - \alpha| \leq \delta$. De plus, si $x_0 \neq \alpha$, on a

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{x_k - \alpha} = \Phi'(\alpha). \quad (\text{P-1})$$

si $\Phi'(\alpha) \neq 0$, la convergence est d'ordre 1 (exactement).

Proof. On va construire un intervalle fermé borné, noté $\mathcal{V}$, pour lequel les hypothèses du Théorème 1.4 sont vérifiées. Comme Φ' est continue dans un voisinage de α avec $|\Phi'(\alpha)| < 1$, alors il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta], \quad |\Phi'(x)| < 1.$$

On propose ici une démonstration de ce résultat.

□ On note $(\mathcal{P})$ la proposition (avec les hypothèses sur Φ de l'énoncé)

$$(\mathcal{P}) : \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall x \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta], \quad |\Phi'(x)| < 1.$$

On va démontrer $(\mathcal{P})$ par l'absurde en supposant non $(\mathcal{P})$, c'est à dire

$$\forall \delta > 0, \exists x \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta], \text{ tel que } |\Phi'(x)| \geq 1.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note par exemple $\delta_n = 1/n$. Alors on a

$$\exists x_n \in [\alpha - \delta_n, \alpha + \delta_n], \text{ tel que } |\Phi'(x_n)| \geq 1.$$

Comme $\alpha - 1/n \leq x_n \leq \alpha + 1/n$, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers α . Par continuité de $x \mapsto |\Phi'(x)|$ et comme $|\Phi'(x_n)| \geq 1$, on déduit

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |\Phi'(x_n)| = |\Phi'(\alpha)| \geq 1$$

ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $|\Phi'(\alpha)| < 1$. □

On note $\mathcal{V} = [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$,

$$\forall x \in \mathcal{V}, \quad |\Phi'(x)| < 1.$$

Comme l'intervalle $\mathcal{V}$ est un fermé et que l'application $|\Phi'|$ est continue sa borne supérieure est atteinte dans $\mathcal{V}$:

$$\exists \bar{x} \in \mathcal{V} \text{ tel que } |\Phi'(\bar{x})| = \sup_{x \in \mathcal{V}} |\Phi'(x)|.$$

On a donc $L = |\Phi'(\bar{x})| < 1$.

Montrons que $\Phi(\mathcal{V}) \subset \mathcal{V}$. En effet, d'après la formule de Taylor-Lagrange:

$\forall x \in \mathcal{V}, \exists \xi \in]\min(x, \alpha), \max(x, \alpha)[\subset \mathcal{V}$ tel que

$$\Phi(x) = \Phi(\alpha) + (x - \alpha)\Phi'(\xi).$$

On en déduit

$$|\Phi(x) - \Phi(\alpha)| = |x - \alpha| |\Phi'(\xi)| \leq \delta |\Phi'(\xi)| \leq \delta$$

Comme $\Phi(\alpha) = \alpha$, on obtient $|\Phi(x) - \alpha| \leq \delta$ i.e. $\Phi(x) \in \mathcal{V}$.

On peut donc appliquer le Théorème 1.4 avec $[a, b] = \mathcal{V} = [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$) ce qui permet de conclure. □

