

Théorème (Point fixe de Banach ★★★★★). Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach et $U \subset \mathcal{B}$ un sous-ensemble fermé. On suppose que $\Phi : U \longrightarrow U$ est une application strictement contractante, i.e.

$$\exists L \in [0, 1[, \quad \|\Phi(\mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{y})\| \leq L \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \quad \forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U \times U. \quad (\text{P-1})$$

Alors

- a. Φ admet un unique point fixe $\alpha \in U$ (i.e. unique solution de $\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{x})$).
- b. La suite des itérés $\mathbf{x}^{[k+1]} = \Phi(\mathbf{x}^{[k]})$ converge vers α pour toute valeur initiale $\mathbf{x}^{[0]} \in U$.
- c. Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\|\alpha - \mathbf{x}^{[k]}\| \leq \frac{L^{k-l}}{1-L} \|\mathbf{x}^{[l+1]} - \mathbf{x}^{[l]}\|, \quad 0 \leq l \leq k \quad (\text{P-2})$$

Proof. On démontre tout d'abord l'existence d'un point fixe. Pour cela on va démontrer que la suite $\mathbf{x}^{[k]}$ est de Cauchy dans U fermé d'un espace de Banach (donc elle converge dans U).

Comme Φ est contractante, on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$\|\mathbf{x}^{[k+1]} - \mathbf{x}^{[k]}\| = \|\Phi(\mathbf{x}^{[k]}) - \Phi(\mathbf{x}^{[k-1]})\| \leq L \|\mathbf{x}^{[k]} - \mathbf{x}^{[k-1]}\|$$

ce qui donne par récurrence pour tout $0 \leq j \leq k$

$$\|\mathbf{x}^{[k+1]} - \mathbf{x}^{[k]}\| \leq L^j \|\mathbf{x}^{[k+1-j]} - \mathbf{x}^{[k-j]}\| \quad (\text{P-3})$$

ou encore pour tout $0 \leq l \leq k$, ($l = k - j$)

$$\|\mathbf{x}^{[k+1]} - \mathbf{x}^{[k]}\| \leq L^{k-l} \|\mathbf{x}^{[l+1]} - \mathbf{x}^{[l]}\| \quad (\text{P-4})$$

On obtient aussi par récurrence

$$\forall l \geq 0, \quad \left\| \mathbf{x}^{[k+1+l]} - \mathbf{x}^{[k+l]} \right\| \leq L^l \left\| \mathbf{x}^{[k+1]} - \mathbf{x}^{[k]} \right\|. \quad (\text{P-5})$$

Soit $p \geq 1$. On en déduit par application répétée de l'inégalité triangulaire que

$$\begin{aligned} \left\| \mathbf{x}^{[k+p]} - \mathbf{x}^{[k]} \right\| &= \left\| (\mathbf{x}^{[k+p]} - \mathbf{x}^{[k+p-1]}) + (\mathbf{x}^{[k+p-1]} - \mathbf{x}^{[k+p-2]}) + \dots + (\mathbf{x}^{[k+1]} - \mathbf{x}^{[k]}) \right\| \\ &= \left\| \sum_{l=0}^{p-1} (\mathbf{x}^{[k+l+1]} - \mathbf{x}^{[k+l]}) \right\| \\ &\leq \sum_{l=0}^{p-1} \left\| \mathbf{x}^{[k+l+1]} - \mathbf{x}^{[k+l]} \right\| \\ &\stackrel{(\text{P-5})}{\leq} \sum_{l=0}^{p-1} L^l \left\| \mathbf{x}^{[k+1]} - \mathbf{x}^{[k]} \right\| = \frac{1 - L^p}{1 - L} \left\| \mathbf{x}^{[k+1]} - \mathbf{x}^{[k]} \right\| \\ &\leq \frac{1 - L^p}{1 - L} L^k \left\| \mathbf{x}^{[1]} - \mathbf{x}^{[0]} \right\|. \quad (\text{en utilisant (P-4), avec } l = 0) \end{aligned}$$

Comme $L^k \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow +\infty$, on conclut que $(\mathbf{x}^{[k]})$ est une suite de Cauchy. De plus, par construction $\mathbf{x}^{[k]} \in U \subset \mathcal{B}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, et $\mathcal{B}$ étant un espace de Banach et U un fermé, la suite $(\mathbf{x}^{[k]})$ converge alors vers $\alpha \in U$. Comme Φ est contractante, elle est donc continue et en passant à la limite dans $\mathbf{x}^{[k+1]} = \Phi(\mathbf{x}^{[k]})$, on aboutit à $\alpha = \Phi(\alpha)$, i.e. α est un point fixe de Φ dans U .

L'unicité se déduit immédiatement par la contraction de la fonction Φ . En effet, soit α_1 et α_2 deux points fixes de Φ , alors

$$\|\alpha_1 - \alpha_2\| = \|\Phi(\alpha_1) - \Phi(\alpha_2)\| \leq L \|\alpha_1 - \alpha_2\|$$

Or $L < 1$, et donc nécessairement on a $\alpha_1 = \alpha_2$.

Il reste à démontrer l'inégalité (P-2). On a vu que pour $p \geq 1$

$$\left\| \mathbf{x}^{[k+p]} - \mathbf{x}^{[k]} \right\| \leq \frac{1 - L^p}{1 - L} \left\| \mathbf{x}^{[k+1]} - \mathbf{x}^{[k]} \right\|$$

L'application norme étant continue et $L < 1$, on obtient à la limite quand $p \rightarrow +\infty$

$$\left\| \boldsymbol{\alpha} - \mathbf{x}^{[k]} \right\| \leq \frac{1}{1 - L} \left\| \mathbf{x}^{[k+1]} - \mathbf{x}^{[k]} \right\|$$

On obtient l'inégalité en utilisant (P-4). □

