

EXERCICE 1

On suppose que la fonction f est continue sur $[a, b]$, vérifie $f(a)f(b) < 0$ et qu'il existe un unique $\alpha \in]a, b[$ tel que $f(\alpha) = 0$. On définit les trois suites $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ par

- $a_0 = a$, $b_0 = b$ et $x_0 = \frac{a+b}{2}$,

- $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} a_{k+1} = b_{k+1} = x_k & \text{si } f(x_k) = 0, \\ a_{k+1} = x_k, \ b_{k+1} = b_k & \text{si } f(b_k)f(x_k) < 0, \\ a_{k+1} = a_k, \ b_{k+1} = x_k & \text{si } f(a_k)f(x_k) < 0. \end{cases}$$

et

$$x_{k+1} = (a_{k+1} + b_{k+1})/2.$$

Q. 1 a. Montrer par récurrence faible sur $k \in \mathbb{N}$ que

$$(\mathcal{P}_k) \quad : \quad a \leq a_k \leq a_{k+1} \leq \alpha \leq b_{k+1} \leq b_k \leq b.$$

b. En déduire que les suites (a_k) , (b_k) et (x_k) convergent vers α .

□

R. 1 a. • **Initialisation.** Montrons que $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.

On a $a < b$, $a_0 = a$, $b_0 = b$, $x_0 = (a_0 + b_0)/2$ et $\alpha \in]a, b[$.

- si $f(x_0) = 0$, alors $a_1 = b_1 = x_0 = \alpha$.
- si $f(x_0)f(b_0) < 0$, alors $\alpha \in]x_0, b_0[$ et $a_1 = x_0, b_1 = b_0$.
- si $f(x_0)f(a_0) < 0$, alors $\alpha \in]a_0, x_0[$ et $a_1 = a_0, b_1 = x_0$.

Dans ces 3 cas, $(\mathcal{P}_0)$ est vérifiée.

- **Hérédité.** Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on suppose que $(\mathcal{P}_{k-1})$ est vraie. Montrons que $(\mathcal{P}_k)$ est vérifiée.
Par hypothèse de récurrence, on a

$$a \leq a_{k-1} \leq a_k \leq \alpha \leq b_k \leq b_{k-1} \leq b.$$

comme $x_k = (a_k + b_k)/2$, on déduit

$$a_k \leq x_k \leq b_k.$$

- si $f(x_k) = 0$, alors $a_{k+1} = b_{k+1} = x_k = \alpha$.
- si $f(x_k)f(b_k) < 0$, alors $\alpha \in]x_k, b_k[$ et $a_{k+1} = x_k, b_{k+1} = b_k$.
- si $f(x_k)f(a_k) < 0$, alors $\alpha \in]a_k, x_k[$ et $a_{k+1} = a_k, b_{k+1} = x_k$.

Dans ces 3 cas, $(\mathcal{P}_k)$ est vérifiée.

- **Conclusion.** On a démontré par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}$, $(\mathcal{P}_k)$ est vraie.

- b. La suite (a_k) est convergente car elle est croissante et majorée. La suite (b_k) est décroissante et minorée : elle est donc convergente. De plus $0 \leq b_k - a_k \leq \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2}$ et donc $0 \leq b_k - a_k \leq \frac{b-a}{2^k}$. On en déduit que les suites (a_k) et (b_k) ont même limite. Or $\forall k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in [a_k, b_k]$ ceci entraîne que α est la limite de ces 2 suites.
- c. Par construction, $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_k \leq x_k \leq b_k$. D'après le théorème des gendarmes, les suites (a_k) et (b_k) convergeant vers α , on obtient la convergence de la suite (x_k) vers α .

Q. 2 a. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|x_k - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^{k+1}}$.

b. Soit $\epsilon > 0$. En déduire que si $k \geq \frac{\log(\frac{b-a}{\epsilon})}{\log(2)} - 1$ alors $|x_k - \alpha| \leq \epsilon$.

□

R. 2 a. On a $\forall k \in \mathbb{N}$, $x_k = \frac{a_k + b_k}{2}$ et $a_k \leq \alpha \leq b_k$ d'où $|x_k - \alpha| \leq \frac{b_k - a_k}{2}$. Ce qui donne

$$|x_k - \alpha| \leq \frac{b - a}{2^{k+1}}.$$

b. Pour avoir $|x_k - \alpha| \leq \epsilon$, il suffit d'avoir $\frac{b-a}{2^{k+1}} \leq \epsilon$, et la fonction $\log$ étant croissante on obtient

$$k \geq \frac{\log(\frac{b-a}{\epsilon})}{\log(2)} - 1.$$

Q. 3 [Algo] Ecrire une fonction algorithmique, nommée **Dichotomie**, retournant une approximation de α avec une précision de ϵ ainsi que le nombre d'itérations nécessaire.

□

R. 3 Voici un exemple d'une telle fonction (existence mais non unicité de racines)

Algorithme 1 Méthode de dichotomie pour la recherche d'une racine α de f

Données : a, b : deux réels $a < b$,
 f : $f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$ et $f(a)f(b) < 0$
 eps : un réel strictement positif.

Résultat : x : un réel tel que $|x - \alpha| \leq \text{eps}$.
 iter : nombre d'itérations nécessaire.

```
1: Fonction  $[x, \text{iter}] \leftarrow \text{Dichotomie}(f, a, b, \text{eps})$ 
2:    $A, B \in \mathbb{R}$ 
3:    $A \leftarrow a, B \leftarrow b, x \leftarrow (a + b)/2$ 
4:    $\text{iter} \leftarrow 0$ 
5:   Tantque  $|x - A| > \text{eps}$  faire
6:     Si  $f(x) == 0$  alors
7:        $A \leftarrow x, B \leftarrow x$ 
8:     Sinon Si  $f(B)f(x) < 0$  alors
9:        $A \leftarrow x$   $\triangleright B$  inchangé
10:    Sinon
11:       $B \leftarrow x$   $\triangleright A$  inchangé
12:    Fin Si
13:     $x \leftarrow (A + B)/2$ 
14:     $\text{iter} \leftarrow \text{iter} + 1$ 
15:  Fin Tantque
16: Fin Fonction
```

