

## EXERCICE 7

En  $-1700$  av. J.-C., les babyloniens ne connaissaient que les nombres rationnels (fractions) et ils utilisaient le système sexagésimal (base 60). Pour approcher la valeur  $\sqrt{2}$ , ils utilisaient comme approximation (voir tablette YBC 7289)

$$\alpha = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = \frac{30547}{21600}$$

L'erreur commise est  $|\alpha - \sqrt{2}| \approx 5.994e - 7$ .



**Q. 1** *Comment feriez-vous pour trouver à la main une méthode permettant de trouver des nombres rationnels approchant  $\sqrt{2}$ .* □

---

**R. 1** Il suffit de voir que  $\sqrt{2}$  est la racine positive de  $f(x) = x^2 - 2$  et d'appliquer la méthode de Newton par exemple. La suite des itérés de Newton s'écrit alors

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^2 - 2}{2x_k} = \frac{x_k^2 + 2}{2x_k}$$

Avec  $x_0 = 1$ , on obtient

| $k$ | $x_k$             | $ \sqrt{2} - x_k $ |
|-----|-------------------|--------------------|
| 1   | $\frac{3}{2}$     | 8.57864e-02        |
| 2   | $\frac{17}{12}$   | 2.45310e-03        |
| 3   | $\frac{577}{408}$ | 2.12390e-06        |

Avec  $x_0 = \frac{5}{4}$ , on obtient

| $k$ | $x_k$                       | $ \sqrt{2} - x_k $ |
|-----|-----------------------------|--------------------|
| 1   | $\frac{57}{40}$             | 1.07864e-02        |
| 2   | $\frac{6449}{4560}$         | 4.08236e-05        |
| 3   | $\frac{83176801}{58814880}$ | 5.89203e-10        |

---

**Q. 2** Généraliser la méthode pour trouver une approximation rationnelle de  $\sqrt{a}$  où  $a$  est un réel positif. □

---

**R. 2** Il suffit de voir que  $\sqrt{a}$  est la racine positive de  $f(x) = x^2 - a$  et d'appliquer la méthode de Newton par exemple. La suite des itérés de Newton s'écrit alors

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^2 - a}{2x_k} = \frac{x_k^2 + a}{2x_k}$$

Avec  $a = 3$  et  $x_0 = 1$ , on obtient

| $k$ | $x_k$           | $ \sqrt{3} - x_k $ |
|-----|-----------------|--------------------|
| 1   | 2               | 2.67949e-01        |
| 2   | $\frac{7}{4}$   | 1.79492e-02        |
| 3   | $\frac{97}{56}$ | 9.20496e-05        |

---

**Q. 3** Généraliser la méthode pour trouver une approximation rationnelle de  $\sqrt[n]{a}$  où  $a$  est un réel positif et  $n \in \mathbb{N}^*$ . □

**R. 3** Il suffit de voir que  $\sqrt[n]{a}$  est la racine positive de  $f(x) = x^n - a$  et d'appliquer la méthode de Newton par exemple. La suite des itérés de Newton s'écrit alors

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^n - a}{nx_k^{n-1}} = \frac{(n-1)x_k^n + a}{nx_k^{n-1}}$$

Avec  $a = 3$ ,  $n = 4$  et  $x_0 = 1$ , on obtient

| $k$ | $x_k$                                                                         | $ \sqrt[4]{3} - x_k $ |
|-----|-------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| 1   | $\frac{3}{2}$                                                                 | 1.83926e-01           |
| 2   | $\frac{97}{72}$                                                               | 3.11482e-02           |
| 3   | $\frac{115403137}{87616608}$                                                  | 1.06368e-03           |
| 4   | $\frac{236297297271008837816738085152257}{179546943199700984864483416264832}$ | 1.28780e-06           |

