

EXERCICE 6

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $I =]\alpha_-, \alpha_+[$ un voisinage de α et $\phi \in \mathcal{C}^1(I)$. On suppose que α est un point fixe de ϕ tel que

$$|\phi'(\alpha)| < 1.$$

- Q. 1**
- a. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in \mathcal{V} = [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$, $|\phi'(x)| < 1$.
 - b. Montrer que ϕ est contractante sur $\mathcal{V}$ et que $\phi(\mathcal{V}) \subset \mathcal{V}$.
 - c. Citer précisément le théorème du cours qui, à partir de Q. 1-a. et b, permet d'en déduire la convergence de l'algorithme du point fixe vers α au moins à l'ordre 1.

□

-
- R. 1**
- a. Puisque ϕ' est continue et que $|\phi'(\alpha)| < 1$, il existe $\delta > 0$ et un intervalle fermé $\mathcal{V} = [\alpha - \delta, \alpha + \delta] \subset]\alpha_-, \alpha_+[$ tels que pour tout $x \in \mathcal{V}$, $|\phi'(x)| < 1$.

On propose ici une démonstration de ce résultat.

□ Comme ϕ' est continue en α , on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \beta > 0 \text{ tel que } \forall x \in I, \left(|x - \alpha| < \beta \Rightarrow |\phi'(x) - \phi'(\alpha)| < \varepsilon \right).$$

On note $M = \phi'(\alpha)$ et on prend $\varepsilon = 1 - |M|$ qui est strictement positif car $0 \geq |M| = |\phi'(\alpha)| < 1$. Dans ce cas, il existe $\beta > 0$ tel que $] \alpha - \beta, \alpha + \beta[\subset I$ et

$$\forall x \in I, \left(|x - \alpha| < \beta \Rightarrow |\phi'(x) - M| < 1 - |M| \right).$$

Soit $x \in I$ tel que $|x - \alpha| < \beta$, c'est à dire $x \in] \alpha - \beta, \alpha + \beta[$, alors on a

$$\begin{aligned} |\phi'(x) - M| < 1 - |M| &\Leftrightarrow -1 + |M| < \phi'(x) - M < 1 - |M| \\ &\Leftrightarrow -1 + M + |M| < \phi'(x) < 1 + M - |M| \end{aligned}$$

Comme $-|M| \leq M \leq |M|$, on a $M + |M| \geq 0$ et $M - |M| \leq 0$, ce qui entraine

$$|\phi'(x) - M| < 1 - |M| \Rightarrow -1 < \phi'(x) < 1.$$

On a donc,

$$\forall x \in] \alpha - \beta, \alpha + \beta[, |\phi'(x)| < 1.$$

En posant $\delta = \beta/2$ (par ex.), on obtient, en définissant $\mathcal{V} = [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$,

$$\forall x \in \mathcal{V}, |\phi'(x)| < 1.$$

□

b. On pose

$$L = \sup_{x \in \mathcal{V}} |\phi'(x)| = \max_{x \in \mathcal{V}} |\phi'(x)|.$$

Comme $\mathcal{V}$ est fermé, $L < 1$. Soient $(x, y) \in \mathcal{V}^2$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $\xi \in]x, y[\subset \mathcal{V}$ telle que

$$\phi(x) - \phi(y) = \phi'(\xi)(x - y).$$

Puisque $|\phi'(\xi)| \leq L$, on obtient

$$\forall (x, y) \in \mathcal{V}^2, |\phi(x) - \phi(y)| \leq L|x - y|,$$

ce qui signifie ϕ est contractante sur $\mathcal{V}$. De plus, si $x \in \mathcal{V}$, en utilisant la formule précédente avec $y = \alpha \in \mathcal{V}$, on obtient

$$|\phi(x) - \alpha| \leq L|x - \alpha| < |x - \alpha| \leq \delta,$$

et donc $\phi(x) \in \mathcal{V}$. Ainsi on a $\phi(\mathcal{V}) \subset \mathcal{V}$.

c. Voici le théorème du cours:

Théorème (Théorème du point fixe dans $\mathbb{R}$, application contractante). *Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé, non vide, et Φ une application contractante de I dans lui-même. Alors, il existe un unique point $\alpha \in I$ vérifiant $\Phi(\alpha) = \alpha$. Le point α est appelé **point fixe de la fonction Φ** . Pour tout $x_0 \in I$, la suite*

$$x_{k+1} = \Phi(x_k), \quad \forall k \in \mathbb{N} \tag{P-1}$$

est bien définie et elle converge vers α avec un ordre 1 au moins.

Soit $x_0 \in \mathcal{V}$ et la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par l'algorithme du point fixe.

Q. 2 Montrer que si $\forall k \in \mathbb{N}, x_k \neq \alpha$ alors

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{x_k - \alpha} = \phi'(\alpha). \tag{P-2}$$

□

R. 2 Avec $x_0 \in \mathcal{V} \setminus \{\alpha\}$, d'après Q. 1, la suite définie par $x_{k+1} = \phi(x_k)$, $\forall k \in \mathbb{N}$ converge vers α à l'ordre 1 au moins.

On a

$$\frac{x_{k+1} - \alpha}{x_k - \alpha} = \frac{\phi(x_k) - \phi(\alpha)}{x_k - \alpha}.$$

Comme la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers α avec $\forall k \in \mathbb{N}$, $x_k \neq \alpha$ et que ϕ est dérivable en α on obtient

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\phi(x_k) - \phi(\alpha)}{x_k - \alpha} = \phi'(\alpha).$$

Q. 3 Supposons maintenant que $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$ et que

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad \phi^{(i)}(\alpha) = 0.$$

a. Montrer que la méthode du point fixe est d'ordre $p + 1$ au moins.

b. Montrer que si $\forall k \in \mathbb{N}$, $x_k \neq \alpha$ alors

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{(x_k - \alpha)^{p+1}} = \frac{\phi^{(p+1)}(\alpha)}{(p+1)!}. \quad (\text{P-3})$$

c. Que peut-on dire si $\phi^{(p+1)}(\alpha) \neq 0$?

□

R. 3 a. Comme $\phi'(\alpha) = 0$, alors (en particulier) $|\phi'(\alpha)| < 1$. D'après la question 1, cela signifie que pour tout $x_0 \in \mathcal{V}$, la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par l'algorithme du point fixe (P-1) converge vers α .

Soit $k \in \mathbb{N}$. En utilisant la formule de Taylor-Lagrange, il existe $\xi_k \in]\min(\alpha, x_k), \max(\alpha, x_k)[$ tel que

$$x_{k+1} - \alpha = \phi(x_k) - \phi(\alpha) = \sum_{i=1}^p \frac{(x_k - \alpha)^i}{i!} \underbrace{\phi^{(i)}(\alpha)}_{=0} + \frac{(x_k - \alpha)^{p+1}}{(p+1)!} \phi^{(p+1)}(\xi_k)$$

c'est à dire

$$x_{k+1} - \alpha = \frac{(x_k - \alpha)^{p+1}}{(p+1)!} \phi^{(p+1)}(\xi_k). \quad (\text{P-4})$$

De plus, $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$, $\phi^{(p+1)}$ est continue sur $\mathcal{V}$, un fermé borné et donc

$$\exists C > 0, \text{ tel que } \forall x \in \mathcal{V}, |\phi^{(p+1)}(x)| \leq C.$$

Comme $\xi_k \in \mathcal{V}$, on déduit de (P-4) que

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq \frac{C}{(p+1)!} |x_k - \alpha|^{p+1}$$

et donc la convergence est d'ordre $(p+1)$ au moins.

b. La fonction $\phi^{(p+1)}$ étant continue et $\lim_{k \rightarrow +\infty} \xi_k = \alpha$, on a

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \phi^{(p+1)}(\xi_k) = \phi^{(p+1)}(\alpha).$$

On a $\forall k \in \mathbb{N}$, $x_k \neq \alpha$ et donc (P-4) peut s'écrire

$$\frac{x_{k+1} - \alpha}{(x_k - \alpha)^{p+1}} = \frac{\phi^{(p+1)}(\xi_k)}{(p+1)!} \quad (\text{P-5})$$

En prenant la limite, on obtient

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{(x_k - \alpha)^{p+1}} = \frac{1}{(p+1)!} \phi^{(p+1)}(\alpha).$$

c. Soit $\varepsilon > 0$. En multipliant la valeur absolue de (P-5) par $|x_k - \alpha|^{-\varepsilon} \neq 0$, on obtient

$$\frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|^{p+1+\varepsilon}} = |x_k - \alpha|^{-\varepsilon} \frac{|\phi^{(p+1)}(\xi_k)|}{(p+1)!}$$

Or $|x - \alpha|^{-\varepsilon} \xrightarrow{x \rightarrow \alpha} +\infty$, et $\phi^{(p+1)}(x) \xrightarrow{x \rightarrow \alpha} \phi^{(p+1)}(\alpha) \neq 0$, ce qui entraine

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|^{p+1+\varepsilon}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} |x_k - \alpha|^{-\varepsilon} \frac{|\phi^{(p+1)}(\xi_k)|}{(p+1)!} = +\infty.$$

Donc, $\forall \varepsilon > 0$, la convergence n'est pas d'ordre $p+1+\varepsilon$. Elle est d'ordre $(p+1)$ (exactement).

