

Théorème (Théorème du point fixe dans $\mathbb{R}$ (application $\mathcal{C}^1$). Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé, non vide, et $\Phi \in \mathcal{C}^1(I)$ vérifiant $\Phi(I) \subset I$ et

$$\exists L < 1 \text{ tel que } \forall x \in I, |\Phi'(x)| \leq L, \quad (\text{P-1})$$

Soit $x_0 \in I$ et $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $x_{k+1} = \Phi(x_k)$. On a alors

- a. la fonction Φ admet un unique point fixe $\alpha \in I$,
- b. $\forall k \in \mathbb{N}, x_k \in I$,
- c. la suite (x_k) converge vers α avec un ordre 1 au moins.
- d. Si $x_0 \neq \alpha$, alors

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{x_k - \alpha} = \Phi'(\alpha). \quad (\text{P-2})$$

et, si $\Phi'(\alpha) \neq 0$, la convergence est d'ordre 1 (exactement).

Proof. Pour démontrer les trois premiers points il suffit de montrer que (P-1) entraîne que Φ est contractante sur I pour pouvoir appliquer le théorème 1.2.

En effet, soit $(x, y) \in I^2, x \neq y$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $\xi \in]\min(x, y), \max(x, y)[$ tel que

$$\frac{\Phi(x) - \Phi(y)}{x - y} = \Phi'(\xi).$$

Ce résultat s'obtient aussi par un développement de Taylor. On obtient alors

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| = |x - y| |\Phi'(\xi)| \leq L |x - y|.$$

L'application Φ est donc contractante sur I et le théorème 1.2 s'applique.

Pour le dernier point, on remarque tout d'abord que si $x_0 \neq \alpha$, alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $x_k \neq \alpha$. Ensuite, on utilise la définition de la suite et du point fixe α :

$$x_{k+1} - \alpha = \Phi(x_k) - \Phi(\alpha).$$

On utilise le théorème des accroissements finis pour obtenir: $\exists \xi_k \in]\min(x_k, \alpha), \max(x_k, \alpha)[$ tel que

$$\frac{\Phi(x_k) - \Phi(\alpha)}{x_k - \alpha} = \Phi'(\xi_k).$$

Quand $k \rightarrow +\infty$, on a $x_k \rightarrow \alpha$ et donc $\xi_k \rightarrow \alpha$. Par continuité de la fonction Φ' on obtient (P-2).

Pour démontrer que la convergence est d'ordre 1 (exactement) si $\Phi'(\alpha) \neq 0$, on va multiplier l'équation précédente par $(x_k - \alpha)^{-\varepsilon}$ avec $\varepsilon > 0$ pour obtenir

$$\frac{\Phi(x_k) - \Phi(\alpha)}{(x_k - \alpha)^{1+\varepsilon}} = (x_k - \alpha)^{-\varepsilon} \Phi'(\xi_k).$$

Or $|x - \alpha|^{-\varepsilon} \xrightarrow{x \rightarrow \alpha} +\infty$, et $\phi'(x) \xrightarrow{x \rightarrow \alpha} \phi'(\alpha) \neq 0$, ce qui entraine

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|^{1+\varepsilon}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} |x_k - \alpha|^{-\varepsilon} |\phi'(\xi_k)| = +\infty.$$

Donc, $\forall \varepsilon > 0$, la convergence n'est pas d'ordre $1 + \varepsilon$. Elle est donc d'ordre 1 (exactement). □

