

EXERCICE 4

Soient $[a, b]$ un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et ϕ une fonction continue de $[a, b]$ dans lui même ($\phi([a, b]) \subset [a, b]$). Soit $x_0 \in [a, b]$. On considère la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ donnée par

$$x_{k+1} = \phi(x_k) \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (\text{P-1})$$

Q. 1 Montrer que la suite (P-1) est bien définie (x_k existe pour tout $k \in \mathbb{N}$). □

R. 1 La suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$, est bien définie si la relation (P-1) permet de définir complètement (et de manière unique) l'ensemble des termes de la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$, connaissant x_0 .

Dans le cas présent, il faut s'assurer que $x_k \in [a, b]$ pour tout entier k car la fonction ϕ n'est par hypothèse définie que sur $[a, b]$. En effet, si x_k n'appartient pas à l'intervalle $[a, b]$, alors on ne peut pas définir x_{k+1} puisque $\phi(x_k)$ n'existe pas.

Nous montrons ce résultat par récurrence :

- Initialisation pour $k = 0$. Par hypothèse, $x_0 \in [a, b]$.
- Hérédité: nous supposons que $x_k \in [a, b]$ et nous allons montrer que $x_{k+1} \in [a, b]$. Par définition, $x_{k+1} = \phi(x_k)$. Puisque par hypothèse, $\phi([a, b]) \subset [a, b]$, on en déduit immédiatement que $x_{k+1} \in [a, b]$.

Remarque. *hypothèse importante* : $\phi([a, b]) \subset [a, b]$.

| **Q. 2** Montrer que si la suite (P-1) converge, alors elle converge vers un point fixe de ϕ . □

R. 2 Supposons que la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite notée $\bar{x}$. $\bar{x} \in [a, b]$ car $[a, b]$ est un intervalle fermé. Par ailleurs, en utilisant la continuité de ϕ , on a

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \phi(x_k) = \phi(\bar{x}).$$

Par les théorème de comparaison des limites et la relation (P-1), on a:

$$\bar{x} = \lim_{k \rightarrow +\infty} x_{k+1} \overset{(P-1)}{=} \lim_{k \rightarrow +\infty} \phi(x_k) = \phi(\bar{x}).$$

Ainsi $\bar{x} = \phi(\bar{x})$ et donc $\bar{x}$ est un point fixe de ϕ .

Remarque. *hypothèses importantes : $[a, b]$ est fermé et ϕ est continue sur $[a, b]$.*

| **Q. 3** Existence du point fixe : montrer qu'il existe $\alpha \in [a, b]$ tel que $\phi(\alpha) = \alpha$. □

R. 3 On considère la fonction g définie par $g(x) = \phi(x) - x$. Comme $\phi([a, b]) \subset [a, b]$,

$$g(a) = \phi(a) - a \geq a - a \geq 0.$$

De manière similaire,

$$g(b) = \phi(b) - b \leq b - b \leq 0.$$

Puisque ϕ est continue sur $[a, b]$, le théorème des valeurs intermédiaires (ou Bolzano) (sur $[a, b]$, ϕ prend toutes les valeurs entre $\phi(a)$ et $\phi(b)$) garantit l'existence d'un nombre $\alpha \in [a, b]$ tel que $g(\alpha) = 0$. Or

$$0 = g(\alpha) = \phi(\alpha) - \alpha,$$

donc α est un point fixe de ϕ .

Remarque. *L'hypothèse de continuité de ϕ est cruciale. Le résultat est faux si ϕ n'est pas continue.*

On peut par exemple considérer la fonction $\phi_0 : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ telle que $\phi_0(x) = \frac{1}{2}$ si $-1 \leq x \leq 0$, et $\phi_0(x) = -\frac{1}{2}$ si $0 < x \leq 1$, qui n'admet pas de point fixe sur $[-1, 1]$ (voir Figure 1).

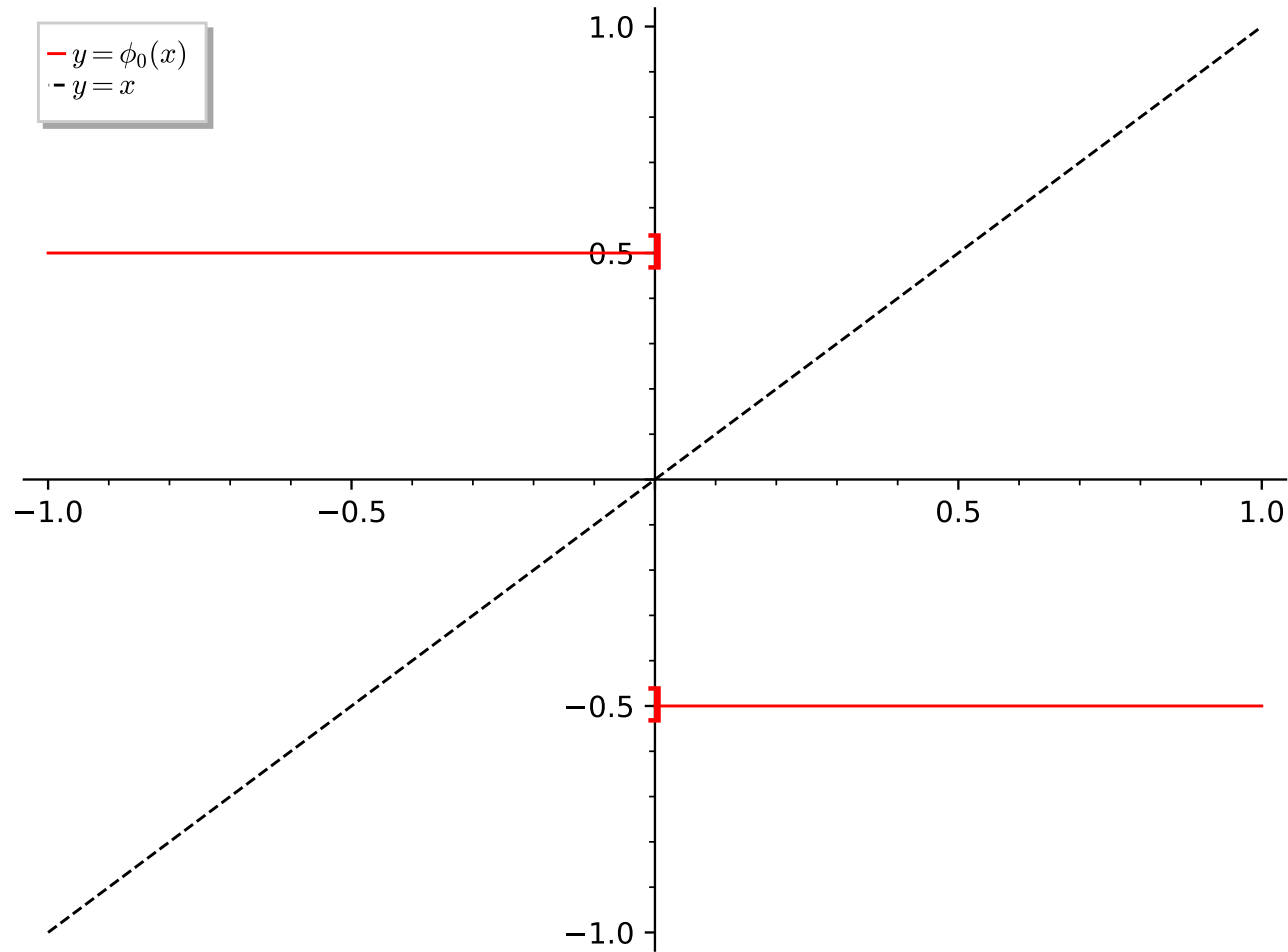


Figure 1: Graphe représentatif de la fonction ϕ_0 et de la droite $y = x$

On pourra aussi remarquer qu'il n'y a pas forcément unicité du point fixe. En effet, la fonction ϕ définie par $\phi(x) = x$, $\forall x \in [a, b]$ est continue de $[a, b]$ dans $[a, b]$ et admet une infinité de points fixes.

On suppose de plus que ϕ est contractante, c'est à dire que

$$\exists L \in [0, 1[, \text{ tel que, } \forall (x, y) \in [a, b]^2, |\phi(x) - \phi(y)| \leq L|x - y|.$$

Q. 4 a. Montrer que ϕ admet un unique point fixe $\alpha \in [a, b]$.

b. Montrer que la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers α , pour toute donnée initiale x_0 dans $[a, b]$.

□

R. 4 a. Nous avons démontré l'existence au moins d'un point fixe. Nous utilisons une démarche classique pour montrer l'unicité. Nous supposons que la fonction ϕ admet deux points fixes α_1 et α_2 ($\alpha_1 = \phi(\alpha_1)$ et $\alpha_2 = \phi(\alpha_2)$) et nous allons montrer que $\alpha_1 = \alpha_2$. En utilisant le fait que ϕ est contractante, on a

$$|\alpha_1 - \alpha_2| = |\phi(\alpha_1) - \phi(\alpha_2)| \leq L|\alpha_1 - \alpha_2|.$$

ce qui peut être réécrit comme

$$(1 - L)|\alpha_1 - \alpha_2| \leq 0. \tag{P-2}$$

Comme $(1 - L) > 0$, l'inégalité (P-2) implique $|\alpha_1 - \alpha_2| \leq 0$ et donc $\alpha_1 = \alpha_2$. La fonction ϕ a donc un unique point fixe.

b. On a montré, dans les questions précédentes, que la fonction ϕ admet un unique point fixe $\alpha \in [a, b]$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$|x_{k+1} - \alpha| = |\phi(x_k) - \phi(\alpha)| \leq L|x_k - \alpha|,$$

si bien que, par récurrence, on peut montrer que

$$|x_k - \alpha| \leq L^k |x_0 - \alpha|, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Comme $L < 1$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} L^k = 0$ et donc le terme de droite de l'inégalité précédente tend vers 0. Par le théorème de comparaison des limites,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} |x_k - \alpha| = 0.$$

Q. 5 [Algo] *Écrire l'algorithme du point fixe (fonction `PointFixe`) permettant de résoudre l'équation $\phi(x) = x$.* □

R. 5 On écrit ci-dessous l'algorithme du point fixe, en supposant que l'on recherche un point fixe non nul.

Algorithme 1 Fonction **PointFixe** : résout $\phi(x) = x$ par la méthode du point fixe

Données : ϕ : fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

x_0 : nombre réel, (donnée initiale)

tol : nombre réel strictement positif (tolérance)

$k_{\max}$: nombre entier supérieur ou égal à 1 (nombre maximal d'itérations)

Résultat : x : un réel tel que $\frac{|\phi(x)-x|}{|x|+1} \leq tol$

1: **Fonction** $x \leftarrow \text{PointFixe}(\phi, x_0, tol, k_{\max})$

2: $k \leftarrow 1$

3: $x \leftarrow \phi(x_0)$

4: $r \leftarrow \frac{|x-x_0|}{|x|+1}$

▷ résidu à l'itération 1

5: **Tantque** $r > tol$ et $k \leq k_{\max}$ **faire**

6: $x_0 \leftarrow x$

7: $x \leftarrow \phi(x_0)$

8: $r \leftarrow \frac{|x-x_0|}{|x|+1}$

▷ résidu à l'itération k+1

9: $k \leftarrow k + 1$

10: **Fin Tantque**

11: **Fin Fonction**

