

EXERCICE 3

Soient $I = [0, \pi/2]$ et $\begin{cases} \Phi : I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sin(x) \end{cases}$. Soit $x_0 \in I \setminus \{0\}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$x_{k+1} = \Phi(x_k).$$

- Q. 1** a. Montrer que la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bien définie.
b. Montrer que la suite converge vers $\alpha \in I$ que l'on déterminera.

□

- R. 1** a. Pour cela, il suffit de démontrer par récurrence sur k que $x_k \in I$.

- Initialisation: $x_0 \in I$, par hypothèse.
- Hérédité: Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose $x_k \in I$, et on peut donc calculer $f(x_k)$ et définir $x_{k+1} = \Phi(x_k)$.
Or, sur $\mathbb{R}_+$, on a $\sin(x) \leq x$, (étudier $g(x) = x - \sin(x)$...). Comme $x_k \in I$ et que $\sin(x) \geq 0, \forall x \in I$, on obtient

$$0 \leq x_{k+1} = \sin(x_k) \leq x_k$$

et donc $x_{k+1} \in I$.

b. On a vu que la suite était décroissante ($x_{k+1} \leq x_k$) et minorée par 0: elle est donc convergente. Notons $\alpha \in \mathbb{R}$ sa limite.

On a, $\forall k \in \mathbb{N}$, $x_k \in I$, un fermé borné de $\mathbb{R}$, donc $\alpha \in I$.

Comme Φ est continue sur I , on a

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \Phi(x_k) = \Phi\left(\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k\right) = f(\alpha)$$

De plus, on a

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \Phi(x_k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} x_{k+1} = \alpha$$

et donc $\alpha \in I$ est un point fixe de Φ .

En posant $g(x) = x - \Phi(x)$, on a $g(0) = 0$ et, $\forall x \in I \setminus \{0\}$, $g'(x) = 1 - \cos(x) > 0$ c'est à dire $g(x) > 0$: la seule racine de g dans I est donc 0 et c'est alors l'unique point fixe de Φ , i.e. $\alpha = 0$.

Q. 2 a. Montrer que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|} = 1.$$

b. La convergence est-elle linéaire? Justifier.

□

R. 2 a. Comme $x_0 \in I \setminus \{0\}$, ar une simple récurrence, on peut montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad 0 < x_k < 1.$$

Soit $k \in \mathbb{N}$. Comme $\Phi \in \mathcal{C}^1$, on a, en utilisant la formule de Taylor-Lagrange,

$$\xi_k \in]\min(\alpha, x_k), \max(\alpha, x_k)[, \quad \Phi(x_k) = \Phi(\alpha) + (x_k - \alpha)\Phi'(\xi_k).$$

On obtient donc

$$\Phi(x_k) - \Phi(\alpha) = x_{k+1} - \alpha = (x_k - \alpha)\Phi'(\xi_k)$$

Comme $x_k - \alpha \neq 0$, on en déduit

$$\frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|} = \Phi'(\xi_k).$$

Or x_k converge vers α et $\xi_k \in]\min(\alpha, x_k), \max(\alpha, x_k)[$ entraîne $\xi_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \alpha$.

La fonction Φ' étant continue, un passage à limite donne

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \Phi'(\xi_k) = \Phi'(\alpha) = \cos(0) = 1.$$

b. La convergence n'est pas linéaire car il aurait fallu démontrer l'existence de $\mu \in]0, 1[$ telle que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|} = \mu.$$

La convergence est donc sous-linéaire.

