

Compatibilé pour la Multiplication de Matrices par Blocs

Algèbre Linéaire

Le 15 octobre 2026 à 16 h 51

Soient m, r, s, n des entiers strictement positifs, $(m_i)_{i=1}^m, (r_k)_{k=1}^r, (s_l)_{l=1}^s, (n_j)_{j=1}^n$ des éléments de $\mathbb{N}^*$ avec

$$M = \sum_{i=1}^m m_i, \quad R = \sum_{k=1}^r r_k, \quad S = \sum_{l=1}^s s_l, \quad N = \sum_{j=1}^n n_j.$$

Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{M,R}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{S,N}(\mathbb{K})$.

Les matrices sont compatibles pour la multiplication de $\mathbb{A}$ par $\mathbb{B}$ si

$$R = S$$

et dans ce cas

$$\mathbb{P} = \mathbb{A}\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{M,N}(\mathbb{K}) \quad \text{avec } \forall (i, j) \in \llbracket 1, M \rrbracket \times \llbracket 1, N \rrbracket, \quad P_{i,j} = \sum_{k=1}^R A_{i,k} B_{k,j}.$$

On définit la décomposition en $m \times r$ blocs de $\mathbb{A}$ par

$$\mathbb{A} = \begin{matrix} & \begin{matrix} r_1 & \cdots & r_r \end{matrix} \\ \begin{matrix} m_1 \\ \vdots \\ m_m \end{matrix} & \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbb{A}^{(1,1)} & \cdots & \mathbb{A}^{(1,r)} \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \mathbb{A}^{(m,1)} & \cdots & \mathbb{A}^{(m,r)} \end{array} \right) \end{matrix}$$

avec $\mathbb{A}^{(i,k)} \in \mathcal{M}_{m_i, r_k}(\mathbb{K})$ pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ et tout $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$.

On définit la décomposition en $s \times n$ blocs de $\mathbb{B}$ par

$$\mathbb{B} = \begin{matrix} & \begin{matrix} n_1 & \cdots & n_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} s_1 \\ \vdots \\ s_s \end{matrix} & \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbb{B}^{(1,1)} & \cdots & \mathbb{B}^{(1,n)} \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \mathbb{B}^{(s,1)} & \cdots & \mathbb{B}^{(s,n)} \end{array} \right) \end{matrix}$$

avec $\mathbb{B}^{(l,j)} \in \mathcal{M}_{r_l, n_j}(\mathbb{K})$ pour tout $l \in \llbracket 1, s \rrbracket$ et tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Ces matrices décomposées par bloc sont compatibles pour la **multiplication par blocs** de $\mathbb{A}$ par $\mathbb{B}$ si *le nombre de blocs colonnes de $\mathbb{A}$ est égal au nombre de blocs lignes de $\mathbb{B}$ avec correspondance exacte des dimensions*. C'est à dire

- $r = s$
- $\forall k \in \llbracket 1, r \rrbracket, r_k = s_k$.

Avec ces conditions, on a bien évidemment $R = S$.

Les matrices blocs $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ compatibles pour la **multiplication par blocs** de $\mathbb{A}$ par $\mathbb{B}$ s'écrivent donc

$$\mathbb{A} = \begin{matrix} & \begin{matrix} r_1 & \cdots & r_r \end{matrix} \\ \begin{matrix} m_1 \\ \vdots \\ m_m \end{matrix} & \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbb{A}^{(1,1)} & \cdots & \mathbb{A}^{(1,r)} \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \mathbb{A}^{(m,1)} & \cdots & \mathbb{A}^{(m,r)} \end{array} \right) \end{matrix} \quad \text{et} \quad \mathbb{B} = \begin{matrix} & \begin{matrix} n_1 & \cdots & n_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} r_1 \\ \vdots \\ r_r \end{matrix} & \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbb{B}^{(1,1)} & \cdots & \mathbb{B}^{(1,n)} \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \mathbb{B}^{(r,1)} & \cdots & \mathbb{B}^{(r,n)} \end{array} \right) \end{matrix}$$

La matrice produit $\mathbb{P} = \mathbb{A}\mathbb{B}$ peut alors s'écrire sous la forme $m \times n$ blocs :

$$\mathbb{P} = \begin{matrix} & \begin{matrix} \textcolor{blue}{n_1} & \cdots & \textcolor{blue}{n_n} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \textcolor{blue}{m_1} \\ \vdots \\ \textcolor{blue}{m_m} \end{matrix} & \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbb{P}^{(1,1)} & \dots & \mathbb{P}^{(1,n)} \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \mathbb{P}^{(m,1)} & \dots & \mathbb{P}^{(m,n)} \end{array} \right) \end{matrix}$$

et, dans ce cas, on a la formule de multiplication par blocs :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, m \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}^{(i,l)} = \sum_{k=1}^r \mathbb{A}^{(i,k)} \mathbb{B}^{(k,j)} \in \mathcal{M}_{m_i, n_j}(\mathbb{K}) \quad (1)$$