

Exercices associés au cours d'Analyse Numérique I

Résolution de systèmes non linéaires¹

EXERCICE 1 [C]

On suppose que la fonction f est continue sur $[a, b]$, vérifie $f(a)f(b) < 0$ et qu'il existe un unique $\alpha \in]a, b[$ tel que $f(\alpha) = 0$. On définit les trois suites $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ par

- $a_0 = a$, $b_0 = b$ et $x_0 = \frac{a+b}{2}$,

- $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} a_{k+1} = b_{k+1} = x_k & \text{si } f(x_k) = 0, \\ a_{k+1} = x_k, \ b_{k+1} = b_k & \text{si } f(b_k)f(x_k) < 0, \\ a_{k+1} = a_k, \ b_{k+1} = x_k & \text{si } f(a_k)f(x_k) < 0. \end{cases}$$

et

$$x_{k+1} = (a_{k+1} + b_{k+1})/2.$$

Q. 1 a. Montrer par récurrence faible sur $k \in \mathbb{N}$ que

$$(\mathcal{P}_k) \quad : \quad a \leq a_k \leq a_{k+1} \leq \alpha \leq b_{k+1} \leq b_k \leq b.$$

b. En déduire que les suites (a_k) , (b_k) et (x_k) convergent vers α .

□

Q. 2 a. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|x_k - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^{k+1}}$.

b. Soit $\epsilon > 0$. En déduire que si $k \geq \frac{\log(\frac{b-a}{\epsilon})}{\log(2)} - 1$ alors $|x_k - \alpha| \leq \epsilon$.

□

Q. 3 [Algo] Ecrire une fonction algorithmique, nommée **Dichotomie**, retournant une approximation de α avec une précision de ϵ ainsi que le nombre d'itérations nécessaire.

□

EXERCICE 2 [C]

Soient $I = [0, \pi/2]$ et $\begin{cases} \Phi & : & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(x) \end{cases}$. Soit $x_0 \in I \setminus \{0\}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$x_{k+1} = \Phi(x_k).$$

Q. 1 a. Montrer que la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bien définie.

b. Montrer que la suite converge vers $\alpha \in I$ que l'on déterminera.

□

Q. 2 a. Montrer que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|} = 1.$$

b. La convergence est-elle linéaire? Justifier.

□

¹Compilé le 2026/10/19 à 11:54:14

EXERCICE 3 [C]

Soient $[a, b]$ un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et ϕ une fonction continue de $[a, b]$ dans lui-même ($\phi([a, b]) \subset [a, b]$). Soit $x_0 \in [a, b]$. On considère la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ donnée par

$$x_{k+1} = \phi(x_k) \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Q. 1 Montrer que la suite (1) est bien définie (x_k existe pour tout $k \in \mathbb{N}$). □

Q. 2 Montrer que si la suite (1) converge, alors elle converge vers un point fixe de ϕ . □

Q. 3 Existence du point fixe : montrer qu'il existe $\alpha \in [a, b]$ tel que $\phi(\alpha) = \alpha$. □

On suppose de plus que ϕ est contractante, c'est à dire que

$$\exists L \in [0, 1[, \text{ tel que, } \forall (x, y) \in [a, b]^2, |\phi(x) - \phi(y)| \leq L|x - y|.$$

Q. 4 a. Montrer que ϕ admet un unique point fixe $\alpha \in [a, b]$.

b. Montrer que la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers α , pour toute donnée initiale x_0 dans $[a, b]$. □

Q. 5 [Algo] Écrire l'algorithme du point fixe (fonction **PointFixe**) permettant de résoudre l'équation $\phi(x) = x$. □

EXERCICE 4 [C]

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé, non vide, (par ex., avec $a < b$, $[a, b]$, $[a, +\infty[$, $] - \infty, a]$ ou $\mathbb{R}$) et $\Phi : I \longrightarrow I$ une application contractante.

Soit $x_0 \in I$ tel que $\Phi(x_0) \neq x_0$. On considère la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ donnée par

$$x_{k+1} = \Phi(x_k) \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Q. 1 Montrer que la suite (16) est bien définie (x_k existe pour tout $k \in \mathbb{N}$). □

On va démontrer que la suite (16) est une suite de Cauchy.

Q. 2 a. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad |x_{k+1} - x_k| \leq L^k |x_1 - x_0|. \quad (3)$$

b. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall l \geq 0, \quad |x_{k+l} - x_{k+l-1}| \leq L^l |x_k - x_{k-1}|. \quad (4)$$

c. En déduire que,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall p \geq 2, \quad |x_{k+p} - x_k| \leq \frac{1 - L^p}{1 - L} L^k |x_1 - x_0|. \quad (5)$$

Q. 3 a. Déduire de la question précédente que la suite (16) est une suite de Cauchy. □

b. Montrer que la suite (16) converge vers un point fixe de Φ à l'ordre 1 au moins.

c. Montrer l'unicité du point fixe. □

EXERCICE 5 [C]

Soit $\Phi : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ une application de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose qu'il existe $0 \leq L < 1$ tel que $\forall x \in [a, b], |\Phi'(x)| \leq L$.

Q. 1 Sans utiliser les résultats du cours:

a. Montrer que Φ admet au moins un point fixe dans $[a, b]$.

b. Montrer l'unicité du point fixe.

□

On note $\alpha \in [a, b]$ l'unique point fixe de Φ et $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite donnée par

$$x_{k+1} = \Phi(x_k), \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (6)$$

avec $x_0 \in [a, b]$ donné.

Q. 2 a. Montrer que la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bien définie.

b. Montrer que la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers α avec un order 1 au moins.

c. Montrer que si $\forall k \in \mathbb{N}, x_k \neq \alpha$ alors

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{x_k - \alpha} = \Phi'(\alpha)$$

□

On suppose ensuite que $\Phi'(\alpha) = 0$ et $\exists \delta \in \mathbb{R}_{>0}, \exists M \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que pour tout $x \in \mathcal{V}_\delta \stackrel{\text{def}}{=} [\alpha - \delta, \alpha + \delta] \cap [a, b]$ on ai $|\Phi''(x)| \leq M$.

Q. 3 Soit $x_0 \in \mathcal{V}_\delta$.

a. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad x_k \in \mathcal{V}_\delta.$$

b. Montrer que

$$\forall x \in \mathcal{V}_\delta, \quad \frac{M}{2} |\Phi(x) - \alpha| \leq \left(\frac{M}{2} |x - \alpha| \right)^2$$

c. En déduire que

$$\forall x_0 \in \mathcal{V}_\delta, \quad \frac{M}{2} |x_k - \alpha| \leq \left(\frac{M}{2} |x_0 - \alpha| \right)^{2^k}$$

d. Quel est l'ordre de convergence dans ce cas.

e. A quelle condition a-t-on

$$|x_k - \alpha| \leq \frac{2}{M} 10^{-2^k}.$$

□

Q. 4 [algo] Ecrire la fonction algorithmique **PtFixe** retournant une approximation du point fixe α de Φ (s'il existe) en utilisant la suite (x_k) . □ □

EXERCICE 6 □

Soit $\alpha \in \mathbb{R}, I =]\alpha_-, \alpha_+]$ un voisinage de α et $\phi \in \mathcal{C}^1(I)$. On suppose que α est un point fixe de ϕ tel que

$$|\phi'(\alpha)| < 1.$$

Q. 1 a. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in \mathcal{V} = [\alpha - \delta, \alpha + \delta], |\phi'(x)| < 1$.

b. Montrer que ϕ est contractante sur $\mathcal{V}$ et que $\phi(\mathcal{V}) \subset \mathcal{V}$.

c. Citer précisément le théorème du cours qui, à partir de Q. 1-a. et b, permet d'en déduire la convergence de l'algorithme du point fixe vers α au moins à l'ordre 1. □

Soit $x_0 \in \mathcal{V}$ et la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par l'algorithme du point fixe.

Q. 2 Montrer que si $\forall k \in \mathbb{N}, x_k \neq \alpha$ alors

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{x_k - \alpha} = \phi'(\alpha). \quad (7)$$

□

Q. 3 Supposons maintenant que $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$ et que

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad \phi^{(i)}(\alpha) = 0.$$

a. Montrer que la méthode du point fixe est d'ordre $p + 1$ au moins.

b. Montrer que si $\forall k \in \mathbb{N}, x_k \neq \alpha$ alors

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{(x_k - \alpha)^{p+1}} = \frac{\phi^{(p+1)}(\alpha)}{(p+1)!}. \quad (8)$$

c. Que peut-on dire si $\phi^{(p+1)}(\alpha) \neq 0$?

□

EXERCICE 7 [C]

Soit f une fonction de classe C^1 sur $[a, b]$ vérifiant $f(a)f(b) < 0$. et $\lambda = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Soit $x_0 \in [a, b]$ donné. La suite obtenue par la méthode de la corde est donnée par

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\lambda}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

On note $\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{\lambda}$.

Q. 1 Montrer que si pour tout $x \in [a, b]$ on a

$$\min(\lambda(x-a), \lambda(x-b)) \leq f(x) \leq \max(\lambda(x-a), \lambda(x-b)) \quad (9)$$

alors $\Phi([a, b]) \subset [a, b]$.

□

Q. 2 Montrer que si pour tout $x \in [a, b]$ on a

$$\min(0, 2\lambda) < f'(x) < \max(0, 2\lambda) \quad (10)$$

alors $|\Phi'(x)| < 1$.

□

Q. 3 En déduire que sous les deux conditions précédentes la méthode de la corde converge vers l'unique solution $\alpha \in [a, b]$ de $f(x) = 0$.

□

EXERCICE 8 [C]

En -1700 av. J.-C., les babyloniens ne connaissaient que les nombres rationnels (fractions) et ils utilisaient le système sexagésimal (base 60). Pour approcher la valeur $\sqrt{2}$, ils utilisaient comme approximation (voir tablette YBC 7289)

$$\alpha = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = \frac{30547}{21600}$$

L'erreur commise est $|\alpha - \sqrt{2}| \approx 5.994e - 7$.



Q. 1 Comment feriez-vous pour trouver **à la main** une méthode permettant de trouver des nombres rationnels approchant $\sqrt{2}$.

□

Q. 2 Généraliser la méthode pour trouver une approximation rationnelle de $\sqrt{a}$ où a est un réel positif.

□

Q. 3 Généraliser la méthode pour trouver une approximation rationnelle de $\sqrt[n]{a}$ où a est un réel positif et $n \in \mathbb{N}^*$.

□

EXERCICE 9 [C]

Q. 1 a. Soit ϕ une application définie sur $[a, b]$ à valeurs réelles.

- A quelle(s) condition(s) a-t-on existence et unicité d'un point fixe $\alpha \in [a, b]$ de Φ ?
- Sous ces conditions, que peut-on dire de la suite $x_{k+1} = \phi(x_k)$, $\forall k \in \mathbb{N}$ avec $x_0 \in [a, b]$?

b. **[Algo]** Ecrire une **fonction** algorithmique **suitePtFixe** retournant les $(n+1)$ premiers éléments de la suite des itérés de la méthode du point fixe pour une fonction ϕ (attention la fonction algorithmique est vraiment différente de ce que l'on a vu en cours: l'objectif n'est pas le même!).

□

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 10$. On cherche à approcher la racine positive, notée α , de l'équation $f(x) = 0$ par une méthode de point fixe. On pose $\phi_\omega(x) = x - \omega f(x)$, avec $\omega \in \mathbb{R}^{+*}$.

Q. 2 On choisit ici, $\omega = 1$.

a. Montrer que α est un point fixe de ϕ_1 .

b. Démontrer le résultat intermédiaire suivant: soit $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^+$, alors

$$|g(a)| > b \implies \exists \delta > 0, \forall x \in [a - \delta, a + \delta], |g(x)| > b.$$

c. Démontrer qu'il existe $\delta > 0$, tel que

$$\forall x \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta] \setminus \{\alpha\}, |\phi_1(x) - \alpha| > |x - \alpha|.$$

d. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, que peut-on dire de la convergence de la suite $x_{k+1} = \phi_1(x_k)$, $\forall k \in \mathbb{N}$?

□

on pose $\phi_\omega(x) = x - \omega f(x)$, avec $0 < \omega < 1$.

Q. 3 Montrer que α est un point fixe de ϕ_ω , pour tout $\omega \neq 0$.

□

Dans la suite, on choisit $\omega = \frac{1}{8}$ et on pose $x_{k+1} = \phi_{\frac{1}{8}}(x_k)$, pour $k \in \mathbb{N}$.

Q. 4 a. En utilisant un théorème du cours que l'on citera précisément, montrer que $\phi_{\frac{1}{8}}$ a un unique point fixe α dans $[3, 4]$ et que la suite des itérés de l'algorithme du point fixe converge vers α , pour tout x_0 dans $[3, 4]$.

b. Pour x_0 suffisamment proche de α , la convergence est de quelle ordre exactement?

□

On va montrer, par une autre preuve, les résultats de la question 4, sans utiliser le théorème général du cours. Cela permettra aussi d'estimer précisément la vitesse de convergence de la méthode du point fixe appliquée à $\phi_{\frac{1}{8}}$.

Q. 5 Soit $x_0 \in [3, 4]$, $x_0 \neq \alpha$.

a. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, (x_{k+1} - \alpha) = (x_k - \alpha) \left[1 - \frac{1}{8}(x_k + \alpha) \right].$$

b. En utilisant **a.** et $\phi_{\frac{1}{8}}([3, 4]) \subset [3, 4]$ (à établir), montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \left| 1 - \frac{1}{8}(x_k + \alpha) \right| \leq \frac{5 - \alpha}{8}.$$

c. En déduire que la suite $(x_k)_{k \geq 0}$ converge vers α , et que la convergence est linéaire.

d. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, |x_k - \alpha| \leq \left(\frac{5 - \alpha}{8} \right)^k |x_0 - \alpha|.$$

e. En déduire que

$$\forall k \in \mathbb{N}, |x_k - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4} \right)^k,$$

puis estimer le nombre d'itérations suffisant pour obtenir une valeur de α précise à $\varepsilon > 0$ près.

□

Q. 6 [Algo] Proposer un **programme** algorithmique permettant de calculer les 20 premiers termes de la suite des itérés de l'algorithme du point fixe pour la fonction $\phi_{\frac{1}{8}}$. Toutes les données devront être initialisées. $\square$

EXERCICE 10 [C]

Q. 1 Citer précisément le théorème de convergence du point fixe dans $\mathbb{R}$ pour une application contractante. $\square$

On rappelle que, de manière générale, la suite des itérés $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de la méthode de Newton pour la résolution de l'équation $g(x) = 0$ est

$$z_{k+1} = z_k - \frac{g(z_k)}{g'(z_k)}, \text{ avec } z_0 \text{ donné.}$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$, on définit la fonction f_λ par

$$\begin{cases} f_\lambda : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 - \lambda \end{cases}.$$

On note $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite des itérés de la méthode de Newton pour la résolution de l'équation $f_\lambda(x) = 0$ pour x_0 donné.

Q. 2 a. Expliciter la fonction Φ telle que $x_{k+1} = \Phi(x_k)$.

b. Etablir le tableau de variations de la fonction Φ .

c. En déduire que $\Phi(x) \geq \sqrt{\lambda}$, $\forall x \in]0, +\infty[$.

d. Montrer que l'application Φ est contractante sur $[\sqrt{\lambda}, +\infty[$. $\square$

Q. 3 Soit $x_0 \in [\sqrt{\lambda}, +\infty[$.

a. Montrer que la suite $(x_k)_{k \geq 1}$ est bien définie

b. En déduire que cette suite converge vers $\sqrt{\lambda}$. $\square$

Q. 4 Soit $x_0 \in [\sqrt{\lambda}, +\infty[$. on note $e_k = x_k - \sqrt{\lambda}$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

a. Montrer que

$$e_{k+1} = \frac{e_k^2}{2x_k}. \quad (11)$$

b. En déduire l'ordre de convergence de la suite (en justifiant!) $\square$

Q. 5 Que peut-on dire de la suite $(x_k)_{k \geq 1}$, si $x_0 \in]0, \sqrt{\lambda}[$? Justifier. $\square$

EXERCICE 11 [C]

Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach et $U \subset \mathcal{B}$ un sous-ensemble fermé. On suppose que $\Phi : U \longrightarrow U$ est une application contractante. Soit $\mathbf{x}^{[0]} \in U$. On note $(\mathbf{x}^{[k]})_{k \in \mathbb{N}}$, la suite récurrente donnée par

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{x}^{[k+1]} = \Phi(\mathbf{x}^{[k]}). \quad (12)$$

Q. 1 Montrer que la suite (12) est bien définie (x_k existe pour tout $k \in \mathbb{N}$). $\square$

On va démontrer que la suite (12) est une suite de Cauchy.

Q. 2 a. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \|\mathbf{x}^{[k+1]} - \mathbf{x}^{[k]}\| \leq L^k \|\mathbf{x}^{[1]} - \mathbf{x}^{[0]}\|. \quad (13)$$

b. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall l \geq 0, \|x_{k+l} - x_{k+l-1}\| \leq L^l \|\mathbf{x}^{[k]} - \mathbf{x}^{[k-1]}\|. \quad (14)$$

c. En déduire que,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall p \geq 2, \|\mathbf{x}^{[k+p]} - \mathbf{x}^{[k]}\| \leq \frac{1-L^p}{1-L} L^k \|\mathbf{x}^{[1]} - \mathbf{x}^{[0]}\|. \quad (15)$$

□

Q. 3 a. Dédurre de la question précédente que la suite (12) est une suite de Cauchy.

b. Montrer que la suite (12) converge vers un point fixe de Φ à l'ordre 1 au moins.

c. Montrer l'unicité du point fixe.

□

EXERCICE 12 [C]

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé, non vide, (par ex., avec $a < b$, $[a, b]$, $[a, +\infty[$, $] - \infty, a]$ ou $\mathbb{R}$) et $\Phi : I \longrightarrow I$ une application contractante.

Soit $x_0 \in I$ tel que $\Phi(x_0) \neq x_0$. On considère la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ donnée par

$$x_{k+1} = \Phi(x_k) \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (16)$$

Q. 1 Montrer que la suite (16) est bien définie (x_k existe pour tout $k \in \mathbb{N}$).

□

Q. 2 Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

a. Donner la définition de f est une application lipschitzienne sur I

b. Donner la définition de f est une application contractante sur I

c. Soit $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$, une suite de réels. Compléter la définition suivante:
la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0, \dots\dots\dots, |x_{k+p} - x_k| < \varepsilon.$$

□

On va démontrer que la suite (16) est une suite de Cauchy. Pour cela, on va tout d'abord établir quelques résultats intermédiaires.

Q. 3 a. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, |x_{k+1} - x_k| \leq L^k |x_1 - x_0|. \quad (17)$$

b. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall s \geq 0, |x_{k+s} - x_{k+s-1}| \leq L^s |x_k - x_{k-1}|. \quad (18)$$

c. En déduire que,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall p \geq 2, |x_{k+p} - x_k| \leq \frac{1-L^p}{1-L} L^k |x_1 - x_0|. \quad (19)$$

□

Q. 4 a. En utilisant les résultats de la question précédente, démontrer de manière détaillée que la suite (16) est une suite de Cauchy.

b. Montrer que la suite (16) converge vers un point fixe de Φ à l'ordre 1 au moins.

c. Montrer l'unicité du point fixe.

□

Q. 5 Soient $J = [0, +\infty[$ et $g \in \mathcal{C}^\infty(J; \mathbb{R})$. On note $x_{k+1} = g(x_k)$, $k \in \mathbb{N}$ avec $x_0 \in J$.

a. A quelle(s) condition(s) sur la dérivée de g , la fonction g est-elle contractante sur J ? Justifiez.

b. On suppose g contractante sur J . A quelle(s) condition(s), s'il y en a, a-t-on existence et unicité d'un point fixe de g dans J .

c. On suppose réunies les conditions pour que g ai un unique point fixe, noté α , dans J et que la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge à l'ordre 1 au moins vers α .

A quelle(s) condition(s) sur g , la suite converge t'elle

- à l'ordre 1 exactement?
- à l'ordre 2 au moins?
- à l'ordre 2 exactement?

□

Soit $f(x) = 2x^3 - x^2 - 2x + 1$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ de racines -1 , 1 et $\frac{1}{2}$. On cherche à déterminer ces racines par l'algorithme du point fixe.

Q. 6 On pose $g_1(x) = x + f(x)$ et $g_2(x) = x - f(x)$.

- a. Montrer que $f(x) = 0 \Leftrightarrow g_1(x) = x$ et $f(x) = 0 \Leftrightarrow g_2(x) = x$.
- b. Que peut-on dire de la suite $x_{k+1} = g_1(x_k)$, $k \in \mathbb{N}$ lorsque x_0 est proche de -1 ? proche de 1 ? proche de $\frac{1}{2}$? En cas de convergence, on précisera l'ordre exact de convergence en justifiant.
- c. Que peut-on dire de la suite $x_{k+1} = g_2(x_k)$, $k \in \mathbb{N}$ lorsque x_0 est proche de -1 ? proche de 1 ? proche de $\frac{1}{2}$? En cas de convergence, on précisera l'ordre exact de convergence en justifiant.

□

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. On pose $g_\lambda(x) = x + \lambda f(x)$, et on pose $x_{k+1} = g_\lambda(x_k)$, $k \in \mathbb{N}$ avec $x_0 \in \mathbb{R}$.

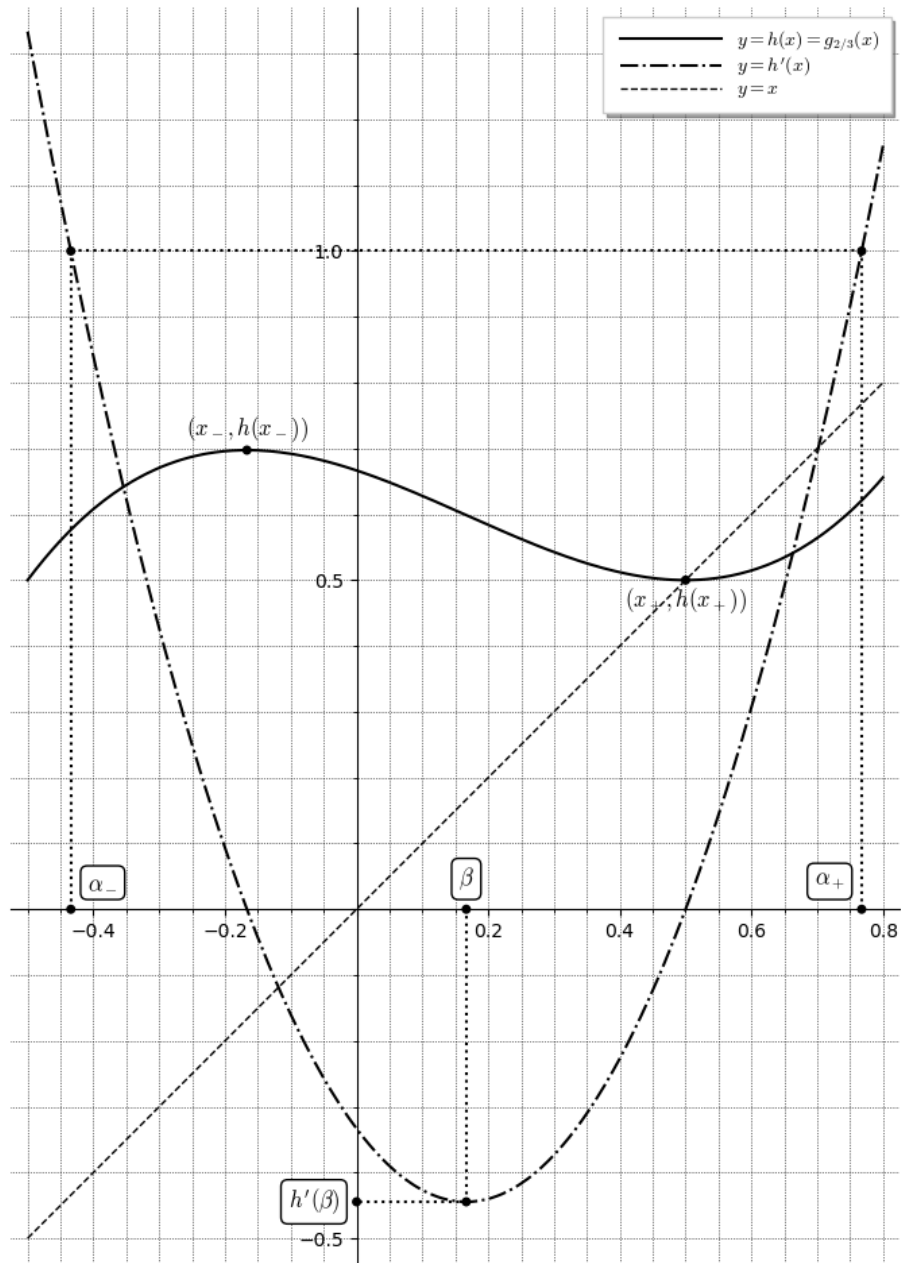
Q. 7 a. Montrer que $f(x) = 0 \Leftrightarrow g_\lambda(x) = x$.

- b. Déterminer des conditions sur λ pour avoir une convergence au moins d'ordre 1 lorsque x_0 est proche de -1 ? proche de 1 ? proche de $\frac{1}{2}$?
- c. A quelle(s) condition(s), a-t'on une convergence d'ordre 2 exactement lorsque x_0 est proche de -1 ? proche de 1 ? proche de $\frac{1}{2}$?

□

Q. 8 On pose $h \stackrel{\text{def}}{=} g_{\frac{2}{3}}$.

- a. En s'aidant de la figure fournie et sans calculs, expliquer la méthodologie permettant de déterminer le plus grand intervalle I pour lequel, $\forall x_0 \in I$, la suite donnée par $x_{k+1} = h(x_k)$, $k \in \mathbb{N}$, converge vers $\frac{1}{2}$ et établir l'ordre exact de convergence.



En notant

$$\alpha_- = -\frac{1}{6}\sqrt{13} + \frac{1}{6} \approx -0.44, \quad \alpha_+ = \frac{1}{6}\sqrt{13} + \frac{1}{6} \approx 0.81, \quad \beta = \frac{1}{6} \approx 0.17, \quad x_- = -\frac{1}{6} \text{ et } x_+ = \frac{1}{2}$$

on a

- $h'(\alpha_+) = h'(\alpha_-) = 1$,
- $h'(\frac{1}{2}) = 0$, $h'(x_+) = h'(x_-) = 0$, $h(x_-) = \frac{113}{162} \approx 0.69$, $h(x_+) = \frac{1}{2}$,
- $h''(\frac{1}{2}) = \frac{8}{3}$, $h''(\beta) = 0$, $h'(\beta) = -\frac{4}{9} \approx -0.44$

b. Déterminer l'ordre exact de convergence en le justifiant.

□