

Exercices associés au cours d'Analyse Numérique I

Chapitre 2: Algorithmique

1 Basique

EXERCICE 1

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, $N \in \mathbb{N}$ et $\forall i \in \llbracket 0, N \rrbracket$, $x_i = a + i \frac{b-a}{N}$, ensemble des points de la discrétisation régulière de $[a, b]$ avec N pas (ou $N + 1$ points).

Q. 1

Ecrire une fonction **DisReg** permettant de retourner l'ensemble des $(x_i)_{i=0}^N$.

Soient $t^0 = 1$, $T = 10$ et $N = 100$.

Q. 2

En utilisant la fonction **DisReg**, écrire un programme permettant d'obtenir l'ensemble des $(t^n)_{n=0}^N$ correspondant à la discrétisation régulière de l'intervalle $[t^0, t^0 + T]$ avec N pas.

EXERCICE 2

Q. 1

Ecrire une fonction **polynome** permettant de calculer

$$y = \sum_{i=0}^n a_i x^i.$$

Q. 2

Soit P le polynôme $P(x) = 4x^3 - 2x + 7$. En utilisant la fonction **polynome**, écrire un programme permettant de calculer $\forall i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$, $y_i = P(t_i)$, avec $t_i = \frac{i}{4}$.

EXERCICE 3

Ecrire une fonction **PM** permettant de calculer

$$y = \prod_{k=0}^m c_k \sin(x^k)$$

EXERCICE 4

Ecrire les fonctions **PS** et **SP** permettant de calculer respectivement

$$y = \prod_{i=1}^m a_i \sum_{j=0}^n b_j \sin((2j\pi/n)x^i)$$

et

$$z = \sum_{k=0}^m c_k \prod_{j=1}^n d_j \sin((2j\pi/n)w^k)$$

EXERCICE 5

On veut calculer

$$I = \prod_{k=0}^n \left(\alpha_k \sum_{i=1}^p \cos\left(\frac{2\pi}{k+i}x\right) + \beta_k \sum_{\substack{i \neq k \\ i=0}}^q \prod_{\substack{j \neq i \\ j=0}}^q \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right)$$

- Q. 1
- Quelles sont les données minimales avec hypothèses permettant de calculer I .
 - Ecrire en langage algorithmique la fonction `calculI` permettant de calculer I .

- Q. 2
- Ecrire un programme algorithmique utilisant la fonction `calculI`.

2 Graphisme

EXERCICE 6

- Q. 1
- Ecrire une fonction `DisReg` permettant de d'obtenir une discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$ ($a < b$) en $n + 1$ points.

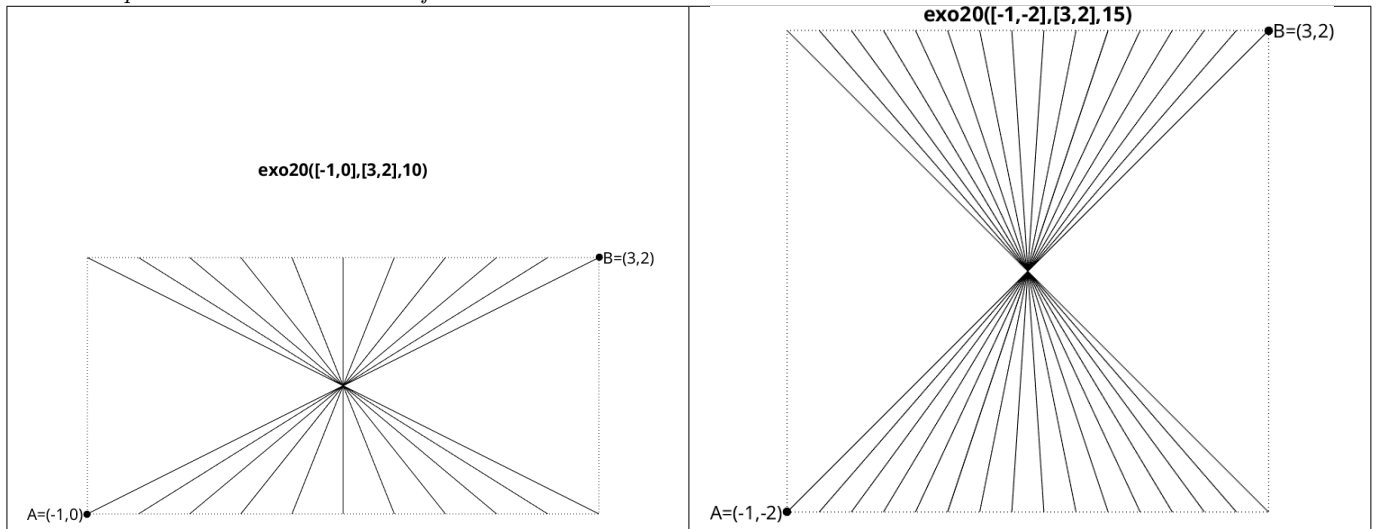
Soient $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$ deux points du plan tels que $x_A < x_B$ et $y_A < y_B$. Ces deux points permettent de définir le rectangle de sommets A , (x_B, y_A) , B et (x_A, y_B) .

On suppose que pour tracer un trait entre les points A et B , on dispose de la commande `plot` $([x_A, x_B], [y_A, y_B])$.

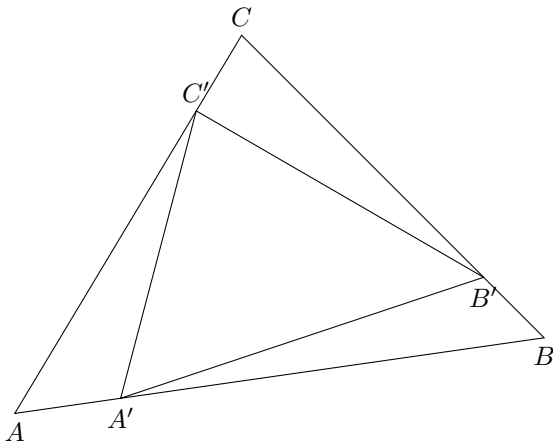
- Q. 2
- Ecrire une fonction `exo20` de paramètres A , B et n permettant de

- représenter les bords du rectangle,
- relier les points des bords supérieurs et inférieurs, dont les abscisses sont une discrétisation régulière en $n + 1$ points, et passant par le centre de symétrie du rectangle.

Deux exemples d'utilisation de cette fonction sont donnés ci-dessous :



EXERCICE 7



Soit T un triangle de sommets A , B et C . A partir de ce triangle on peut construire un nouveau triangle de sommets A' , B' et C' vérifiant

$$\overrightarrow{AA'} = x \overrightarrow{AB}$$

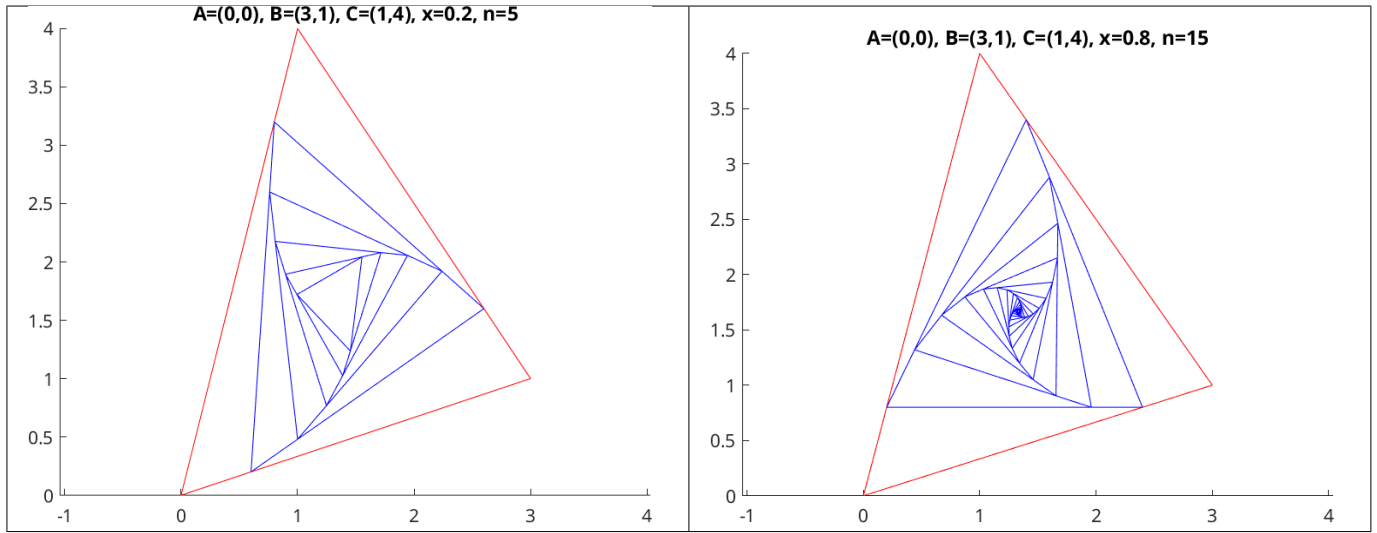
$$\overrightarrow{BB'} = x \overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{CC'} = x \overrightarrow{CA}$$

avec x un réel compris strictement entre 0 et 1.

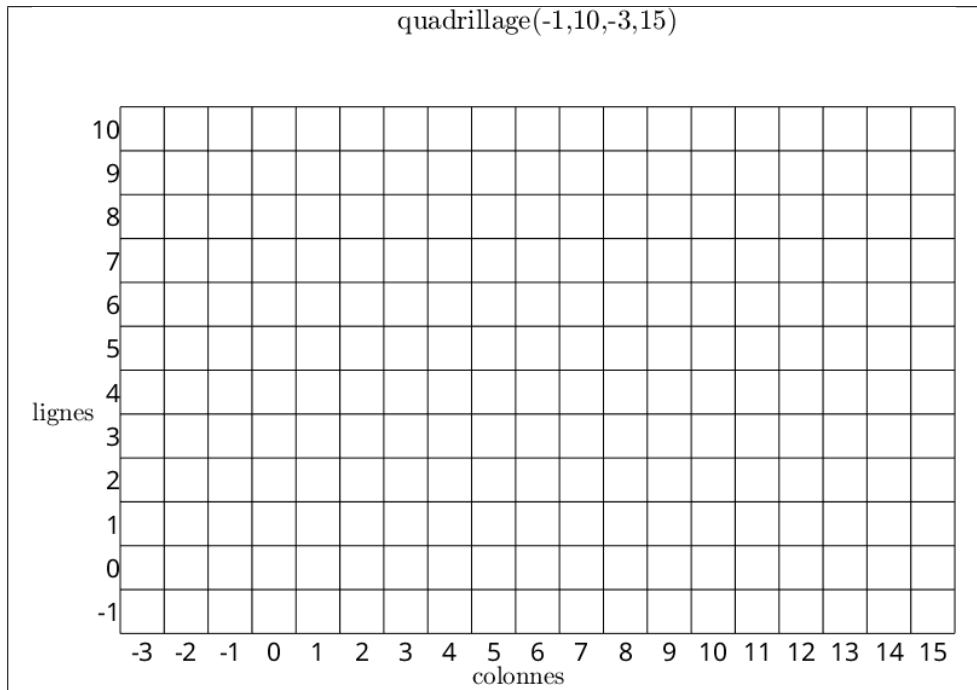
L'objectif est, pour un x fixé, d'itérer n fois ce processus de construction en partant à chaque itération du dernier triangle construit et de représenter l'ensemble des triangles.

Q. 1 Ecrire une fonction **Algorithmique** `triangles` permettant à partir des trois sommets A, B, C d'un triangle initial quelconque non réduit à une droite ou à un point, de représenter ce triangle ainsi que les n triangles obtenus par le processus de construction décrit ci-dessus avec un x donné dans $]0, 1[$. On dispose pour cela de la fonction `plot([xA, xB], [yA, yB])` permettant de tracer le segment $[A, B]$ du plan avec $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$. Voici deux exemples d'utilisation de cette fonction:



Prérequis pour les exercices 8 à 11

On dispose d'un quadrillage quelconque généré par la fonction `quadrillage(imin,imax,jmin,jmax)` dont voici un exemple d'utilisation

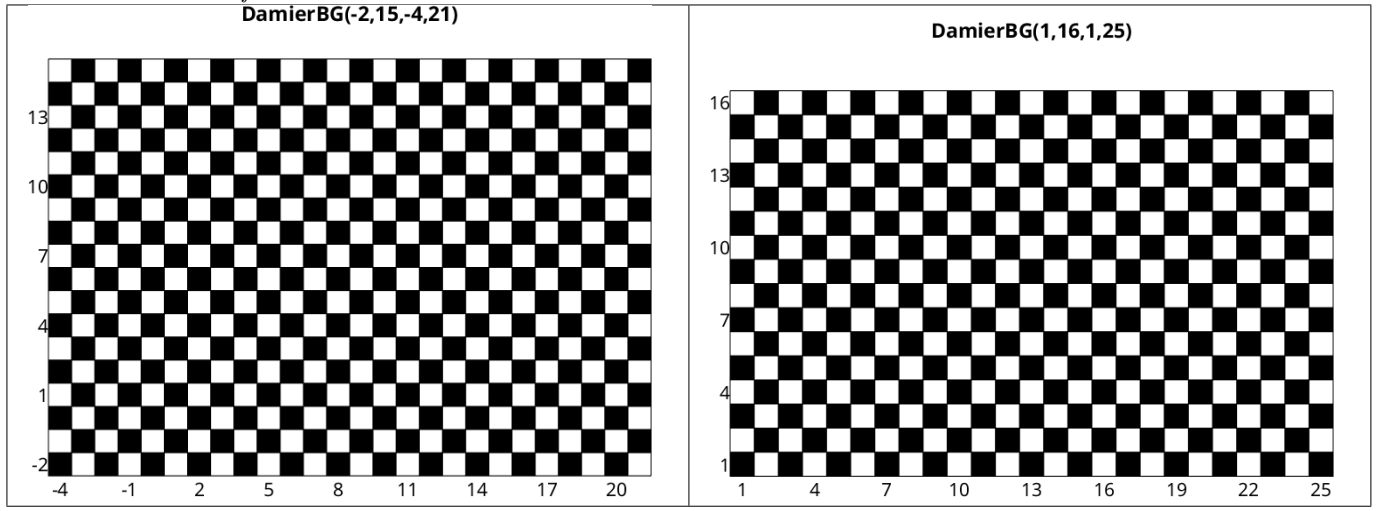


On dispose de plus d'une fonction `black(i,j)` qui dessine un pavé noir en ligne i et colonne j d'un quadrillage.

EXERCICE 8

Q. 1

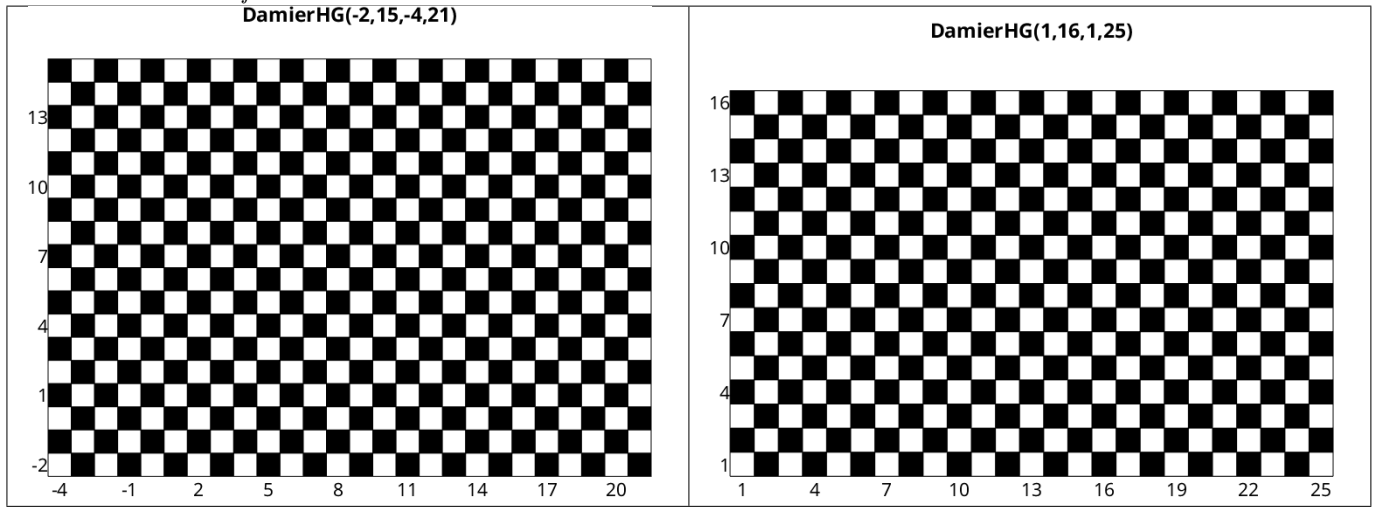
Ecrire la fonction `DamierBG(imin,imax,jmin,jmax)` permettant de créer une mosaïque sur le quadrillage `quadrillage(imin,imax,jmin,jmax)` sachant que la case de position `(imin,jmin)` est noire. Voici deux exemples d'utilisation de cette fonction:



EXERCICE 9

Q. 1

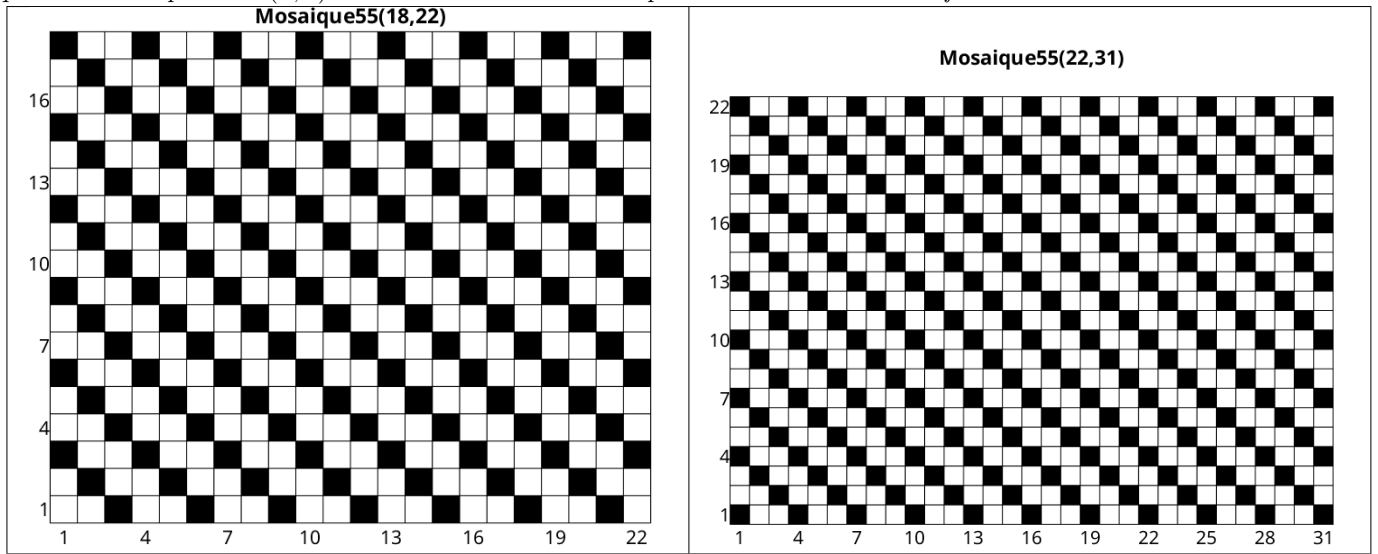
Ecrire la fonction `DamierHG(imin,imax,jmin,jmax)` permettant de créer une mosaïque sur le quadrillage `quadrillage(imin,imax,jmin,jmax)` sachant que la case de position `(imax,jmin)` est noire. Voici deux exemples d'utilisation de cette fonction:



EXERCICE 10

Q. 1

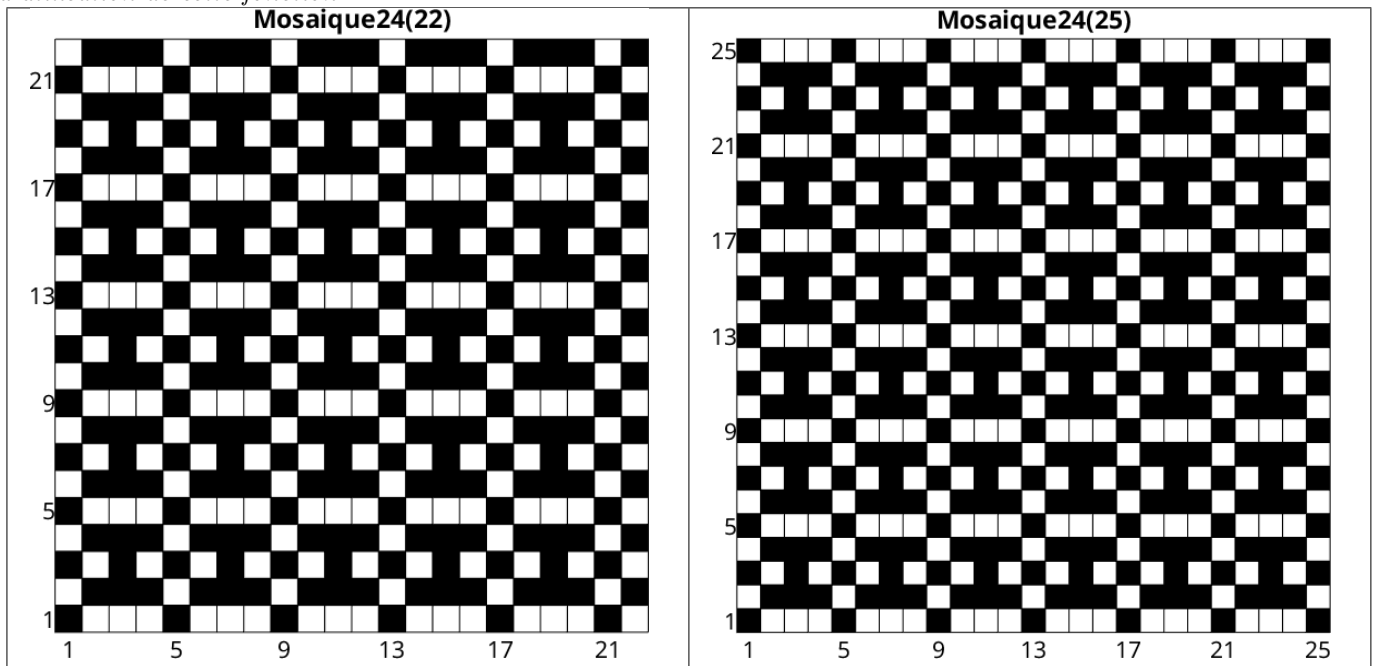
Ecrire la fonction `Mosaique55(n,m)` permettant de créer une mosaïque sur le quadrillage `quadrillage(1,n,1,m)` sachant que la case de position $(n, 1)$ est noire. Voici deux exemples d'utilisation de cette fonction:



EXERCICE 11

Q. 1

Ecrire la fonction `Mosaique24(n)` permettant de créer une mosaïque sur le quadrillage `quadrillage(1,n,1,n)` sachant que la ligne 1 est composée de la séquence noir, blanc, blanc, blanc, noir, blanc, blanc, blanc, Voici deux exemples d'utilisation de cette fonction:



3 Algèbre linéaire

EXERCICE 12

Soient $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ et $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

Q. 1

Ecrire une fonction `dot` permettant de calculer le produit scalaire du vecteur $\mathbf{u}$ par $\mathbf{v}$, noté mathématiquement par $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

Q. 2

Ecrire une fonction **norm2** permettant de calculer la norme euclidienne du vecteur $\mathbf{u}$ donnée par $\|\mathbf{u}\|_2 \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}$.

Soient a et b deux réels.

Q. 3

Ecrire une fonction **aUpbV** permettant de calculer le vecteur $\mathbf{w} \stackrel{\text{def}}{=} a\mathbf{u} + b\mathbf{v}$.

Q. 4

En utilisant les fonctions précédentes, écrire un programme algorithmique permettant de calculer $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_2$ avec $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

EXERCICE 13

Q. 1

Ecrire une fonction **VecZeros** retournant le vecteur nul de $\mathbb{R}^n$.

Q. 2

Ecrire une fonction **VecConst** retournant le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les composantes valent $\alpha \in \mathbb{R}$.

Q. 3

Soient $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Ecrire une fonction **VecPlusConst** retournant le vecteur de $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \mathbf{v}_i = \mathbf{u}_i + \alpha.^a$$

^aCette opération n'est pas une opération algébrique dans $\mathbb{R}^n$, c'est à dire mathématiquement, on ne peut pas écrire $\mathbf{u} + \alpha$!

On suppose que l'on dispose de la fonction algorithmique **rand()** retournant un réel aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$.

Q. 4

Ecrire une fonction **VecRand** retournant un vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les composantes sont aléatoires suivant la loi uniforme sur $[a, b]$.

EXERCICE 14

Q. 1

Ecrire une fonction **MatZeros** retournant la matrice nulle de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

Q. 2

Ecrire une fonction **MatConst** retournant la matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ dont toutes les composantes valent $\alpha \in \mathbb{R}$.

Q. 3

Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Ecrire une fonction **MatPlusConst** retournant la matrice $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, m \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \mathbb{B}_{i,j} = \mathbb{A}_{i,j} + \alpha.^a$$

^aCette opération n'est pas une opération algébrique dans $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, c'est à dire mathématiquement, on ne peut pas écrire $\mathbb{A} + \alpha$!

On suppose que l'on dispose de la fonction algorithmique **rand()** retournant un réel aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$.

Q. 4

Ecrire une fonction **MatRand** retournant une matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ dont toutes les composantes sont aléatoires suivant la loi uniforme sur $[a, b]$.

EXERCICE 15

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

Q. 1

a. Ecrire une fonction algorithmique **setMatCol** permettant d'initialiser le j -ème vecteur colonne de $\mathbb{A}$ par un vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$, avec $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

b. Ecrire une fonction algorithmique **getMatCol** retournant le j -ème vecteur colonne de $\mathbb{A}$ avec $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Q. 2

- Ecrire une fonction algorithmique `setMatRow` permettant d'initialiser le i -ème vecteur ligne de $\mathbb{A}$ par un vecteur $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, avec $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$.
- Ecrire une fonction algorithmique `getMatRow` retournant le i -ème vecteur ligne de $\mathbb{A}$ avec $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$.

EXERCICE 16

Q. 1

Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Ecrire une fonction `aApbB` permettant de calculer la matrice $\mathbb{W} \stackrel{\text{def}}{=} \alpha\mathbb{A} + \beta\mathbb{B}$.

Q. 2

Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $\mathbf{u}$ un vecteur (colonne).

- A quelle(s) condition(s) le produit de la matrice $\mathbb{A}$ par le vecteur $\mathbf{u}$ existe-t-il?
- Sous les conditions précédentes, on note $\mathbf{v} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{A}\mathbf{u}$.
 - A quel espace appartient $\mathbf{v}$?
 - Rappeler précisément la formule permettant de calculer les composantes de $\mathbf{v}$.
- Ecrire une fonction `ProdMatVec` permettant de calculer $\mathbf{v} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{A}\mathbf{u}$.
- Donner un exemple algorithmique d'utilisation.

EXERCICE 17

Q. 1

Soient $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Ecrire la fonction `ProdSca` permettant de retourner le produit scalaire de ces deux vecteurs noté mathématiquement $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

L'objectif de la suite de l'exercice est de voir plusieurs manières de programmer le produit d'une matrice par un vecteur. Soient $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$ et $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

Q. 2

- Rappeler précisément les hypothèses et les formules permettant le calcul de $\mathbf{v} = \mathbb{A}\mathbf{u}$.
- Ecrire la fonction `ProdMatVec` permettant de retourner $\mathbb{A}\mathbf{u}$.

Voici quelques notations mathématiques (non standards) que l'on va utiliser. Si $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ alors

- $\mathbb{A}_{:,j}$ correspond au j -ème vecteur colonne de $\mathbb{A}$.
- $\mathbb{A}_{i,:}$ correspond au i -ème vecteur ligne de $\mathbb{A}$.

On suppose que l'on dispose des commandes suivantes au niveau algorithmique:

Description	Avec fonction	Instruction simplifiée
Obtenir la j -ème colonne d'une matrice $\mathbb{A}$ avec $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, math. noté $\mathbb{A}_{:,j}$	$\mathbf{u} \leftarrow \text{getMatCol}(\mathbb{A}, j)$	$\mathbf{u} \leftarrow \mathbb{A}(:, j)$
Obtenir la i -ème ligne d'une matrice $\mathbb{A}$ avec $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, math. noté $\mathbb{A}_{i,:}$	$\mathbf{v} \leftarrow \text{getMatRow}(\mathbb{A}, i)$	$\mathbf{v} \leftarrow \mathbb{A}(i, :)$
Remplacer la j -ème colonne d'une matrice $\mathbb{A}$ par un vecteur $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ avec $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$	$\mathbb{A} \leftarrow \text{setMatCol}(\mathbb{A}, \mathbf{u}, j)$	$\mathbb{A}(:, j) \leftarrow \mathbf{u}$
Remplacer la i -ème ligne d'une matrice $\mathbb{A}$ par un vecteur $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ avec $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$	$\mathbb{A} \leftarrow \text{setMatRow}(\mathbb{A}, \mathbf{v}, i)$	$\mathbb{A}(i, :) \leftarrow \mathbf{v}$.

Table 1: Instructions algorithmiques pour accéder/modifier une ligne ou une colonne d'une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

Q. 3

- a. Sous les hypothèses de **Q.2** et avec $\mathbf{v} = \mathbb{A}\mathbf{u}$, écrire mathématiquement $\mathbf{v}_i$ comme un produit scalaire en utilisant les notations précisées ci-dessus.
- b. Ecrire la fonction **ProdMatVecFun** permettant de retourner $\mathbb{A}\mathbf{u}$ en utilisant la fonction **ProdSca** et les fonctions de la Table 3 (i.e. sans utiliser les instructions simplifiées).
- c. Ecrire la fonction **ProdMatVecSim** permettant de retourner $\mathbb{A}\mathbf{u}$ en utilisant la fonction **ProdSca** et les instructions simplifiées de la Table 3 (i.e. sans utiliser les fonctions).

Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.

Q. 4

- a. Rappeler précisément les hypothèses et les formules permettant le calcul de $\mathbb{G} = \mathbb{A}\mathbb{B}$.
- b. Ecrire la fonction **ProdMatMat** permettant de retourner $\mathbb{G}$.

Q. 5

Sous les hypothèses trouvées en **Q.4**, on note $\mathbb{G} = \mathbb{A}\mathbb{B}$.

- a. En utilisant les notations mathématiques d'accès aux lignes et colonnes d'une matrice, écrire $\mathbb{G}_{i,j}$ comme un produit scalaire entre un vecteur ligne de $\mathbb{A}$ et un vecteur colonne de $\mathbb{B}$.
- b. Ecrire la fonction **ProdMatMatFun1** permettant de retourner $\mathbb{G}$ en utilisant la formule trouvée en **Q.5** a., des fonctions de la Table 3 (i.e. sans utiliser les instructions simplifiées) et la fonction **ProdSca**.
- c. Ecrire la fonction **ProdMatMatSim1** permettant de retourner $\mathbb{G}$ en utilisant la formule trouvée en **Q.5** a., des instructions simplifiées de la Table 3 et la fonction **ProdSca**.

Q. 6

Sous les hypothèses trouvées en **Q.4**, on note $\mathbb{G} = \mathbb{A}\mathbb{B}$.

- a. En utilisant les notations mathématiques d'accès aux lignes et colonnes d'une matrice, écrire $\mathbb{G}_{:,j}$ (j -ème vecteur colonne de $\mathbb{G}$) comme le produit de la matrice $\mathbb{A}$ par un vecteur colonne de $\mathbb{B}$.
- b. Ecrire la fonction **ProdMatMatFun2** permettant de retourner $\mathbb{G}$ en utilisant la formule trouvée en **Q.6** a., des fonctions de la Table 3 (i.e. sans utiliser les instructions simplifiées) et la fonction **ProdMatVecFun**.
- c. Ecrire la fonction **ProdMatMatSim2** permettant de retourner $\mathbb{G}$ en utilisant la formule trouvée en **Q.6** a., des instructions simplifiées de la Table 3 et la fonction **ProdMatVecSim**.