

PARTIEL DU 21 NOVEMBRE 2025¹
durée : 3h00.

Sans documents et sans appareils électroniques
Le barème est donné à titre indicatif

Dans ce sujet:

- Les deux exercices sont indépendants.
- Les entrées/sorties des fonctions algorithmiques que vous écrirez devront être décrites.
- Le but de toute fonction algorithmique que vous écrirez, et qui n'est pas explicitement demandée, devra être précisé.

EXERCICE 1 (10.25 points)

On rappelle que la sous-matrice principale d'ordre k d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, est la matrice $\Delta_k \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ telle que

$$(\Delta_k)_{i,j} = A_{i,j}, \quad \forall (i, j) \in \llbracket 1, k \rrbracket^2.$$

Q. 1 (Algo)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire inférieure inversible et $b \in \mathbb{C}^p$. On note L_p la sous-matrice principale d'ordre p de L .

- Justifier que L_p est inversible.
- Expliquer la méthodologie permettant de déterminer $x \in \mathbb{C}^p$ solution de $L_p x = b$ et expliciter les formules utilisées en fonction des coefficients de L .
- Ecrire la fonction $x \leftarrow \text{pSolveTril}(L, b)$ où x est solution de $L_p x = b$.

Q. 2 (Algo)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure inversible et $c \in \mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{C})$, un vecteur ligne. On note U_p la sous-matrice principale d'ordre p de U .

- Justifier que U_p est inversible.
- Expliquer la méthodologie permettant de déterminer $y \in \mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{C})$, un vecteur ligne, solution de

$$y U_p = c \tag{1}$$

et expliciter les formules utilisées en fonction des coefficients de U .

- Ecrire la fonction $y \leftarrow \text{pSolveTriurow}(U, c)$ où y est solution de (1).

Nous allons maintenant montrer par récurrence, sur l'ordre $n \geq 2$ des matrices, la proposition suivante:

¹Compilé le 2025/12/16 à 17:17:27.

($\mathcal{P}_n$)

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice dont toutes les sous-matrices principales sont inversibles. Alors il existe $\mathbb{L} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire inférieure à diagonale unité et $\mathbb{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure inversible telles que

$$\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{U}.$$

Q. 3 (Initialisation, $n = 2$)

On se place sous les hypothèses de $(\mathcal{P}_2)$ avec $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix}$.

a. Montrer que

$$A_{1,1} \neq 0 \text{ et } A_{1,1}A_{2,2} - A_{1,2}A_{2,1} \neq 0. \quad (2)$$

b. En déduire que $(\mathcal{P}_2)$ est vérifiée.

Q. 4 (Hérédité, $n > 2$)

On suppose $(\mathcal{P}_{n-1})$ vérifiée.

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont toutes les sous-matrices principales sont inversibles. On pose

$$\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{A}_{n-1} & \mathbf{f} \\ \mathbf{e}^* & g \end{array} \right)$$

avec $\mathbb{A}_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$, $\mathbf{e} \in \mathbb{C}^{n-1}$, $\mathbf{f} \in \mathbb{C}^{n-1}$ et $g \in \mathbb{C}$.

a. Justifier que $\mathbb{A}_{n-1}$ est inversible.

b. En posant

$$\mathbb{B} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_{n-1} & -\mathbb{A}_{n-1}^{-1}\mathbf{f} \\ \hline \mathbf{0}_{1,n-1} & 1 \end{array} \right)$$

démontrer que

$$\det(\mathbb{A}\mathbb{B}) = (g - \mathbf{e}^*\mathbb{A}_{n-1}^{-1}\mathbf{f}) \det \mathbb{A}_{n-1}. \quad (3)$$

c. En déduire que $(g - \mathbf{e}^*\mathbb{A}_{n-1}^{-1}\mathbf{f}) \in \mathbb{C}^*$.

d. Montrer alors, qu'il existe

$$\mathbb{L} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{X}_{n-1} & \mathbf{0}_{n-1,1} \\ \hline \mathbf{l}^* & 1 \end{array} \right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ et } \mathbb{U} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{Y}_{n-1} & \mathbf{v} \\ \hline \mathbf{0}_{1,n-1,1} & h \end{array} \right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

avec $\mathbb{L}$ triangulaire inférieure à diagonale unité et $\mathbb{U}$ triangulaire supérieure inversible telle que $\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{U}$. On exprimera, après justification, $\mathbf{l}^*$, $\mathbf{v}$ et h en fonction de $\mathbb{X}_{n-1}$, $\mathbb{Y}_{n-1}$, $\mathbf{e}^*$, $\mathbf{f}$ et g . (il faudra bien sûr justifier de l'existence de $\mathbb{X}_{n-1}$ et $\mathbb{Y}_{n-1}$ avec les propriétés adéquates)

En répondant aux questions précédentes, on a montré par récurrence que la proposition $(\mathcal{P}_n)$ est vraie $\forall n \geq 2$.

Q. 5

On se place sous les hypothèses de $(\mathcal{P}_n)$. Démontrer l'unicité de la factorisation $\mathbb{L}\mathbb{U}$ de $\mathbb{A}$.

Q. 6 (Algo)

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice dont toutes les sous-matrices principales sont inversibles et $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$.

- On suppose déjà calculées les sous-matrices principales d'ordre $(k-1)$ de L et U . En s'aidant de la question précédente et en utilisant les fonctions `pSolveTril` de **Q. 1** et `pSolveTriurow` de **Q. 2**, expliquer comment calculer la ligne k de L et la colonne k de U . On peut noter, qu'après ces calculs, les sous-matrices principales d'ordre k de L et U sont connues.
- Ecrire la fonction $[L, U] \leftarrow \text{factLU}(A)$ retournant les matrices L et U de $(\mathcal{P}_n)$ en utilisant les fonctions `pSolveTril` et `pSolveTriurow`.

EXERCICE 2 (9.75 points)

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé, non vide, (par ex., avec $a < b$, $[a, b]$, $[a, +\infty[$, $] - \infty, a]$ ou $\mathbb{R}$) et $\Phi : I \rightarrow I$ une application contractante de rapport L .

Soit $x_0 \in I$ tel que $\Phi(x_0) \neq x_0$. On considère la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ donnée par

$$x_{k+1} = \Phi(x_k) \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Q. 1

Montrer que la suite (1) est bien définie (x_k existe pour tout $k \in \mathbb{N}$).

Q. 2

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

- Donner la définition de f est une application lipschitzienne sur I
- Donner la définition de f est une application contractante sur I
- Soit $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$, une suite de réels. Compléter la définition suivante:
la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0, \dots\dots\dots, |x_{k+p} - x_k| < \varepsilon.$$

On va démontrer que la suite (1) est une suite de Cauchy. Pour cela, on va tout d'abord établir quelques résultats intermédiaires.

Q. 3

- Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad |x_{k+1} - x_k| \leq L^k |x_1 - x_0|. \quad (2)$$

- Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall s \geq 0, \quad |x_{k+s} - x_{k+s-1}| \leq L^s |x_k - x_{k-1}|. \quad (3)$$

- En déduire que,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall p \geq 2, \quad |x_{k+p} - x_k| \leq \frac{1 - L^p}{1 - L} L^k |x_1 - x_0|. \quad (4)$$

Q. 4

- a. En utilisant les résultats de la question précédente, démontrer de **manière détaillée** que la suite (1) est une suite de Cauchy.
- b. Montrer que la suite (1) converge vers un point fixe de Φ à l'ordre 1 au moins.
- c. Montrer l'unicité du point fixe.

Q. 5

Soient $J = [0, +\infty[$ et $g \in C^\infty(J; \mathbb{R})$. On note $x_{k+1} = g(x_k)$, $k \in \mathbb{N}$ avec $x_0 \in J$.

- a. A quelle(s) condition(s) sur la dérivée de g , la fonction g est-elle contractante sur J ? Justifiez.
- b. On suppose g contractante sur J . A quelle(s) condition(s), s'il y en a, a-t-on existence et unicité d'un point fixe de g dans J .
- c. On suppose réunies les conditions pour que g ai un unique point fixe, noté α , dans J et que la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge à l'ordre 1 au moins vers α .
A quelle(s) condition(s) sur g , la suite converge t'elle
 - à l'ordre 1 exactement?
 - à l'ordre 2 au moins?
 - à l'ordre 2 exactement?

Soit $f(x) = 2x^3 - x^2 - 2x + 1$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ de racines -1 , 1 et $\frac{1}{2}$. On cherche à déterminer ces racines par l'algorithme du point fixe.

Q. 6

On pose $g_1(x) = x + f(x)$ et $g_2(x) = x - \frac{1}{2}f(x)$.

- a. Montrer que $f(x) = 0 \Leftrightarrow g_1(x) = x$ et $f(x) = 0 \Leftrightarrow g_2(x) = x$.
- b. Que peut-on dire de la suite $x_{k+1} = g_1(x_k)$, $k \in \mathbb{N}$ lorsque x_0 est proche de -1 ? proche de 1 ? proche de $\frac{1}{2}$? En cas de convergence, on précisera l'ordre exact de convergence en justifiant.
- c. Que peut-on dire de la suite $x_{k+1} = g_2(x_k)$, $k \in \mathbb{N}$ lorsque x_0 est proche de -1 ? proche de 1 ? proche de $\frac{1}{2}$? En cas de convergence, on précisera l'ordre exact de convergence en justifiant.