

PARTIEL DU 21 NOVEMBRE 2025¹
durée : 3h00.

Sans documents et sans appareils électroniques
Le barème est donné à titre indicatif

Dans ce sujet:

- Les deux exercices sont indépendants.
- Les entrées/sorties des fonctions algorithmiques que vous écrirez devront être décrites.
- Le but de toute fonction algorithmique que vous écrirez, et qui n'est pas explicitement demandée, devra être précisé.

EXERCICE 1 (10.25 points)

On rappelle que la sous-matrice principale d'ordre k d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, est la matrice $\Delta_k \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ telle que

$$(\Delta_k)_{i,j} = A_{i,j}, \quad \forall (i,j) \in \llbracket 1, k \rrbracket^2.$$

Q. 1 (Algo)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire inférieure inversible et $b \in \mathbb{C}^p$. On note L_p la sous-matrice principale d'ordre p de L .

- Justifier que L_p est inversible.
- Expliquer la méthodologie permettant de déterminer $x \in \mathbb{C}^p$ solution de $L_p x = b$ et expliciter les formules utilisées en fonction des coefficients de L .
- Ecrire la fonction $x \leftarrow \text{pSolveTril}(L, b)$ où x est solution de $L_p x = b$.

R. 1

- a. La matrice L est triangulaire inférieure donc la matrice L_p l'est aussi. La matrice $L_p \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ est définie par

$$(L_p)_{i,j} = (L)_{i,j}, \quad \forall (i,j) \in \llbracket 1, p \rrbracket.$$

La matrice L est triangulaire inférieure, i.e.

$$\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad i < j, \quad (L)_{i,j} = 0.$$

On en déduit

$$\forall (i,j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2, \quad i < j, \quad (L_p)_{i,j} \stackrel{\text{def}}{=} (L)_{i,j} = 0,$$

c'est à dire L_p triangulaire inférieure.

De plus, L_p étant triangulaire inférieure, elle est inversible ssi ses éléments diagonaux sont non nuls, ce qui est le cas car L_p triangulaire inférieure inversible et

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, (L_p)_{i,i} \stackrel{\text{def}}{=} (L)_{i,i} \neq 0.$$

¹Compilé le 2025/12/16 à 17:17:09.

- b. On va utiliser la méthode de descente pour calculer successivement x_1 , puis x_2 , ... jusqu'à x_p .
Soit $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$. On a

$$b_i = \sum_{j=1}^{i-1} (\mathbb{L}_p)_{i,j} x_j + (\mathbb{L}_p)_{i,i} x_i + \sum_{j=i+1}^p (\mathbb{L}_p)_{i,j} x_j.$$

Comme $\mathbb{L}_p$ tri. inf. on a $(\mathbb{L}_p)_{i,j} = 0$ si $i < j$ et donc

$$b_i = \sum_{j=1}^{i-1} (\mathbb{L}_p)_{i,j} x_j + (\mathbb{L}_p)_{i,i} x_i.$$

Comme pour $j < i \leq p$, on a $(\mathbb{L}_p)_{i,j} = L_{i,j}$, et $(\mathbb{L}_p)_{i,i} = L_{i,i} \neq 0$, on en déduit

$$x_i = \frac{1}{L_{i,i}} (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} L_{i,j} x_j).$$

- c. Ecrire la fonction $\mathbf{x} \leftarrow \text{pSolveTril}(\mathbb{L}, \mathbf{b})$ où $\mathbf{x}$ est solution de $\mathbb{L}_p \mathbf{x} = \mathbf{b}$.
d. Voici un algo possible

Algorithme 1 Fonction `pSolveTril` permettant de résoudre le système linéaire triangulaire inférieur inversible

$$\mathbb{L}_p \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

où $\mathbb{L}_p$ est la sous-matrice principale d'ordre p de $\mathbb{L}$

Données : $\mathbb{L}$: matrice triangulaire inférieure inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
 $\mathbf{b}$: vecteur de $\mathbb{C}^p$, $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Résultat : $\mathbf{x}$: vecteur de $\mathbb{C}^p$.

```

1: Fonction  $\mathbf{x} \leftarrow \text{pSolveTril}(\mathbb{L}, \mathbf{b})$ 
2:   Pour  $i \leftarrow 1$  à  $p$  faire
3:      $S \leftarrow 0$ 
4:     Pour  $j \leftarrow 1$  à  $i - 1$  faire
5:        $S \leftarrow S + L(i, j) * x(j)$ 
6:     Fin Pour
7:      $x(i) \leftarrow (b(i) - S) / L(i, i)$ 
8:   Fin Pour
9: Fin Fonction
```

Q. 2 (Algo)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\mathbb{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure inversible et $\mathbf{c} \in \mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{C})$, un vecteur ligne. On note $\mathbb{U}_p$ la sous-matrice principale d'ordre p de $\mathbb{U}$.

- a. Justifier que $\mathbb{U}_p$ est inversible.
b. Expliquer la méthodologie permettant de déterminer $\mathbf{y} \in \mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{C})$, un vecteur ligne, solution de

$$\mathbf{y} \mathbb{U}_p = \mathbf{c} \tag{1}$$

et expliciter les formules utilisées en fonction des coefficients de $\mathbb{U}$.

- c. Ecrire la fonction $\mathbf{y} \leftarrow \text{pSolveTriurow}(\mathbb{U}, \mathbf{c})$ où $\mathbf{y}$ est solution de (1).

- a. La matrice $\mathbb{U}$ est triangulaire supérieure donc la matrice $\mathbb{U}_p$ l'est aussi. Comme $\mathbb{U}$ est triangulaire supérieure inversible, ses éléments diagonaux sont non nuls, et les p premiers sont les éléments diagonaux de $\mathbb{U}_p$. Or, $\mathbb{U}_p$ triangulaire supérieure donc elle est inversible.
- b. On doit résoudre

$$(y_1, \dots, y_p) \begin{pmatrix} \mathbb{U}_{1,1} & \dots & \dots & \mathbb{U}_{1,p} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \mathbb{U}_{p,1} \end{pmatrix} = (c_1, \dots, c_p).$$

On va utiliser la méthode de descente pour calculer successivement y_1 , puis $y_2, \dots$ jusqu'à y_p . Soit $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$. On a, par définition du produit matriciel,

$$c_i = \sum_{j=1}^{i-1} y_j \mathbb{U}_{j,i} + y_i \mathbb{U}_{i,i} \sum_{j=i+1}^p y_j \mathbb{U}_{j,i}.$$

Comme $\mathbb{U}$ tri. sup. on a $\mathbb{U}_{j,i} = 0$ si $i < j$ et donc

$$c_i = \sum_{j=1}^{i-1} y_j \mathbb{U}_{j,i} + y_i \mathbb{U}_{i,i}.$$

Comme $\mathbb{U}_{i,i} \neq 0$, on en déduit

$$y_i = \frac{1}{\mathbb{U}_{i,i}} \left(c_i - \sum_{j=1}^{i-1} y_j \mathbb{U}_{j,i} \right).$$

- c. Voici un algo possible

Algorithme 2 Fonction `pSolveTriurow` permettant de résoudre le système linéaire inversible

$$\mathbf{y} \mathbb{U}_p = \mathbf{c}$$

avec $\mathbf{c} \in \mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{C})$, un vecteur ligne et $\mathbb{U}_p$ sous-matrice principale d'ordre p de $\mathbb{U}$ triangulaire supérieure inversible

Données : $\mathbb{U}$: matrice triangulaire supérieure inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

$\mathbf{c}$: vecteur ligne de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{C})$, $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Résultat : $\mathbf{y}$: vecteur ligne de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{C})$.

```

1: Fonction  $\mathbf{y} \leftarrow \text{pSolveTriurow}(\mathbb{U}, \mathbf{c})$ 
2:   Pour  $i \leftarrow 1$  à  $p$  faire
3:      $S \leftarrow 0$ 
4:     Pour  $j \leftarrow 1$  à  $i - 1$  faire
5:        $S \leftarrow S + y(1, j) * \mathbb{U}(j, i)$ 
6:     Fin Pour
7:      $y(1, i) \leftarrow (c(1, i) - S) / \mathbb{U}(i, i)$ 
8:   Fin Pour
9: Fin Fonction
```

Nous allons maintenant montrer par récurrence, sur l'ordre $n \geq 2$ des matrices, la proposition suivante:

($\mathcal{P}_n$)

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice dont toutes les sous-matrices principales sont inversibles. Alors il existe $\mathbb{L} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire inférieure à diagonale unité et $\mathbb{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure inversible telles que

$$\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{U}.$$

Q. 3 (Initialisation, $n = 2$)

On se place sous les hypothèses de ($\mathcal{P}_2$) avec $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix}$.

a. Montrer que

$$A_{1,1} \neq 0 \text{ et } A_{1,1}A_{2,2} - A_{1,2}A_{2,1} \neq 0. \quad (2)$$

b. En déduire que ($\mathcal{P}_2$) est vérifiée.

R. 3

a. La sous-matrice principale d'ordre 1 de $\mathbb{A}$ est $A_{1,1} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{C})$. La sous-matrice principale d'ordre 2 de $\mathbb{A}$ est $\mathbb{A}$. Comme les sous-matrices principales de $\mathbb{A}$ sont inversibles, on en déduit $A_{1,1} \neq 0$ et $\det \mathbb{A} = A_{1,1}A_{2,2} - A_{1,2}A_{2,1} \neq 0$.

b. On va construire $\mathbb{L} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure à diag. unité et $\mathbb{U} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ triangulaire sup. inversible telles que $\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{U}$.

Pour cela, on doit vérifier que l'on peut construire $\mathbb{L}$ et $\mathbb{U}$ vérifiant

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix} = \mathbb{L}\mathbb{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ L_{2,1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{1,1} & U_{1,2} \\ 0 & U_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{1,1} & U_{1,2} \\ L_{2,1}U_{1,1} & L_{2,1}U_{1,2} + U_{2,2} \end{pmatrix}$$

ce qui correspond à résoudre

$$\begin{cases} U_{1,1} & = & A_{1,1} \\ U_{1,2} & = & A_{1,2} \\ L_{2,1}U_{1,1} & = & A_{2,1} \\ L_{2,1}U_{1,2} + U_{2,2} & = & A_{2,2} \end{cases}$$

Comme $A_{1,1} \neq 0$, on obtient

$$\begin{cases} U_{1,1} & = & A_{1,1} \\ U_{1,2} & = & A_{1,2} \\ L_{2,1} & = & \frac{A_{2,1}}{A_{1,1}} \\ U_{2,2} & = & A_{2,2} - \frac{A_{2,1}}{A_{1,1}}A_{1,2} \end{cases}$$

On a pu déterminer les coefficients de $\mathbb{L}$ et $\mathbb{U}$, toutefois il reste à vérifier que $\mathbb{U}$ inversible, c'est à dire $U_{1,1} \neq 0$ (OK) et $U_{2,2} \neq 0$. On a

$$U_{2,2} = A_{2,2} - \frac{A_{2,1}}{A_{1,1}}A_{1,2} = \frac{A_{1,1}A_{2,2} - A_{1,2}A_{2,1}}{A_{1,1}}$$

qui est non nul.

Q. 4 (Hérédité, $n > 2$)

On suppose ($\mathcal{P}_{n-1}$) vérifiée.

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont toutes les sous-matrices principales sont inversibles. On pose

$$\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{A}_{n-1} & \mathbf{f} \\ \hline \mathbf{e}^* & g \end{array} \right)$$

avec $\mathbb{A}_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$, $\mathbf{e} \in \mathbb{C}^{n-1}$, $\mathbf{f} \in \mathbb{C}^{n-1}$ et $g \in \mathbb{C}$.

a. Justifier que $\mathbb{A}_{n-1}$ est inversible.

b. En posant

$$\mathbb{B} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_{n-1} & -\mathbb{A}_{n-1}^{-1}\mathbf{f} \\ \hline \mathbb{O}_{1,n-1} & 1 \end{array} \right)$$

démontrer que

$$\det(\mathbb{A}\mathbb{B}) = (g - \mathbf{e}^* \mathbb{A}_{n-1}^{-1} \mathbf{f}) \det \mathbb{A}_{n-1}. \quad (3)$$

c. En déduire que $(g - \mathbf{e}^* \mathbb{A}_{n-1}^{-1} \mathbf{f}) \in \mathbb{C}^*$.

d. Montrer alors, qu'il existe

$$\mathbb{L} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{X}_{n-1} & \mathbb{O}_{n-1,1} \\ \hline \mathbf{l}^* & 1 \end{array} \right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ et } \mathbb{U} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{Y}_{n-1} & \mathbf{v} \\ \hline \mathbb{O}_{1,n-1,1} & h \end{array} \right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

avec $\mathbb{L}$ triangulaire inférieure à diagonale unité et $\mathbb{U}$ triangulaire supérieure inversible telle que $\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{U}$. On exprimera, après justification, $\mathbf{l}^*$, $\mathbf{v}$ et h en fonction de $\mathbb{X}_{n-1}$, $\mathbb{Y}_{n-1}$, $\mathbf{e}^*$, $\mathbf{f}$ et g . (il faudra bien sûr justifier de l'existence de $\mathbb{X}_{n-1}$ et $\mathbb{Y}_{n-1}$ avec les propriétés adéquates)

R. 4

a. La matrice $\mathbb{A}_{n-1}$ est la sous-matrice principale d'ordre $n-1$ de $\mathbb{A}$, elle est donc inversible par hypothèse.

b. On a

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{A}_{n-1} & \mathbf{f} \\ \hline \mathbf{e}^* & g \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_{n-1} & -\mathbb{A}_{n-1}^{-1}\mathbf{f} \\ \hline \mathbb{O}_{1,n-1} & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{A}_{n-1} & \mathbb{O}_{n-1,1} \\ \hline \mathbf{e}^* & g - \mathbf{e}^* \mathbb{A}_{n-1}^{-1} \mathbf{f} \end{array} \right)$$

En utilisant le formule des cofacteurs par rapport à la dernière colonne pour calculer le déterminant de $\mathbb{A}\mathbb{B}$ on obtient

$$\det(\mathbb{A}\mathbb{B}) = (g - \mathbf{e}^* \mathbb{A}_{n-1}^{-1} \mathbf{f}) \det \mathbb{A}_{n-1}.$$

De plus, $\mathbb{B}$ est triangulaire supérieure à diagonale unité donc $\det \mathbb{B} = 1$ et on en déduit

$$\det(\mathbb{A}\mathbb{B}) = \det(\mathbb{A}) \det(\mathbb{B}) = \det(\mathbb{A})$$

d'où le résultat.

c. $\mathbb{A}$ et $\mathbb{A}_{n-1}$ étant inversibles, on a $\det \mathbb{A} \neq 0$ et $\det \mathbb{A}_{n-1} \neq 0$. Comme

$$\det(\mathbb{A}) = (g - \mathbf{e}^* \mathbb{A}_{n-1}^{-1} \mathbf{f}) \det \mathbb{A}_{n-1}$$

on en déduit

$$(g - \mathbf{e}^* \mathbb{A}_{n-1}^{-1} \mathbf{f}) \neq 0.$$

d. On va construire $\mathbb{L} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure à diag. unité et $\mathbb{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire sup. inversible telles que $\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{U}$.

On a

$$\mathbb{L}\mathbb{U} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{X}_{n-1} & \mathbb{O}_{n-1,1} \\ \hline \mathbf{l}^* & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{Y}_{n-1} & \mathbf{v} \\ \hline \mathbb{O}_{1,n-1,1} & h \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{X}_{n-1}\mathbb{Y}_{n-1} & \mathbb{X}_{n-1}\mathbf{v} \\ \hline \mathbf{l}^*\mathbb{Y}_{n-1} & \mathbf{l}^*\mathbf{v} + h \end{array} \right)$$

Pour avoir $\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{U}$, il faut donc résoudre

$$\begin{cases} \mathbb{X}_{n-1}\mathbb{Y}_{n-1} & = \mathbb{A}_{n-1} \end{cases} \quad (\text{R1.1a})$$

$$\begin{cases} \mathbb{X}_{n-1}\mathbf{v} & = \mathbf{f} \end{cases} \quad (\text{R1.1b})$$

$$\begin{cases} \mathbf{l}^*\mathbb{Y}_{n-1} & = \mathbf{e}^* \end{cases} \quad (\text{R1.1c})$$

$$\begin{cases} \mathbf{l}^*\mathbf{v} + h & = g \end{cases} \quad (\text{R1.1d})$$

Comme toutes les n sous-matrices principales de $\mathbb{A}$ sont inversibles, on en déduit que les $(n-1)$ sous-matrices principales de $\mathbb{A}_{n-1}$ sont inversibles puisque $\mathbb{A}_{n-1}$ est la sous-matrice principale d'ordre $(n-1)$ de $\mathbb{A}$.

Par hypothèse de récurrence, il existe $\mathbb{L}_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ triangulaire inférieure à diagonale unité et $\mathbb{U}_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure inversible telles que

$$\mathbb{A}_{n-1} = \mathbb{L}_{n-1} \mathbb{U}_{n-1}.$$

On choisit donc $\mathbb{X}_{n-1} = \mathbb{L}_{n-1}$ et $\mathbb{U}_{n-1} = \mathbb{U}_{n-1}$. Ces deux matrices sont inversibles, (R1.1b) et (R1.1c) sont alors équivalentes à

$$\mathbf{v} = \mathbb{L}_{n-1}^{-1} \mathbf{f} \text{ et } \mathbf{l}^* = \mathbf{e}^* \mathbb{U}_{n-1}^{-1}.$$

De (R1.1d), on obtient

$$h = g - \mathbf{l}^* \mathbf{v} = \mathbf{e}^* \mathbb{U}_{n-1}^{-1} \mathbb{L}_{n-1}^{-1} \mathbf{f}$$

On peut noter que, d'après la question précédente

$$\mathbf{e}^* \mathbb{U}_{n-1}^{-1} \mathbb{L}_{n-1}^{-1} \mathbf{f} = g - \mathbf{e}^* (\mathbb{L}_{n-1} \mathbb{U}_{n-1})^{-1} \mathbf{f} = g - \mathbf{e}^* \mathbb{A}_{n-1}^{-1} \mathbf{f} \neq 0.$$

Avec

$$\mathbb{L} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{L}_{n-1} & \mathbb{O}_{n-1,1} \\ \hline \mathbf{e}^* \mathbb{U}_{n-1}^{-1} & 1 \end{array} \right) \text{ et } \mathbb{U} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{U}_{n-1} & \mathbb{L}_{n-1}^{-1} \mathbf{f} \\ \hline \mathbb{O}_{1,n-1} & g - \mathbf{e}^* (\mathbb{L}_{n-1} \mathbb{U}_{n-1})^{-1} \mathbf{f} \end{array} \right)$$

la proposition $(\mathcal{P}_n)$ est bien vérifiée!

En répondant aux questions précédentes, on a montré par récurrence que la proposition $(\mathcal{P}_n)$ est vraie $\forall n \geq 2$.

Q. 5

On se place sous les hypothèses de $(\mathcal{P}_n)$. Démontrer l'unicité de la factorisation $\mathbb{L}\mathbb{U}$ de $\mathbb{A}$.

R. 5

Pour démontrer l'unicité, on va supposer qu'il existe deux factorisations $\mathbb{L}\mathbb{U}$ de $\mathbb{A}$ i.e.

$$\mathbb{A} = \mathbb{L}_1 \mathbb{U}_1 = \mathbb{L}_2 \mathbb{U}_2.$$

avec $\mathbb{L}_1, \mathbb{L}_2$ matrices triangulaires inférieures à diagonale unité et $\mathbb{U}_1, \mathbb{U}_2$ matrices triangulaires supérieures (inversibles). En multipliant l'équation $\mathbb{L}_1 \mathbb{U}_1 = \mathbb{L}_2 \mathbb{U}_2$ à gauche par $\mathbb{L}_1^{-1}$ et à droite par $\mathbb{U}_2^{-1}$ on obtient

$$\mathbb{U}_1 \mathbb{U}_2^{-1} = \mathbb{L}_1^{-1} \mathbb{L}_2. \quad (\text{R1.2})$$

La matrice $\mathbb{L}_1^{-1} \mathbb{L}_2$ est triangulaire inférieure à diagonale unité car produit de deux matrices triangulaires inférieures à diagonale unité. Elle est égale à la matrice $\mathbb{U}_1 \mathbb{U}_2^{-1}$ qui elle est triangulaire supérieure (car produit de deux matrices triangulaires supérieures). Donc $\mathbb{L}_1^{-1} \mathbb{L}_2$ est à la fois une matrice triangulaire supérieure et inférieure : elle est donc diagonale. Comme elle est à diagonale unité on en déduit que $\mathbb{L}_1^{-1} \mathbb{L}_2 = \mathbb{I}$ et donc $\mathbb{L}_1 = \mathbb{L}_2$. De l'équation (R1.2), on tire alors $\mathbb{U}_1 = \mathbb{U}_2$.

Q. 6 (Algo)

Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice dont toutes les sous-matrices principales sont inversibles et $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$.

- On suppose déjà calculées les sous-matrices principales d'ordre $(k-1)$ de $\mathbb{L}$ et $\mathbb{U}$. En s'aidant de la question précédente et en utilisant les fonctions `pSolveTril` de **Q. 1** et `pSolveTriurow` de **Q. 2**, expliquer comment calculer la ligne k de $\mathbb{L}$ et la colonne k de $\mathbb{U}$. On peut noter, qu'après ces calculs, les sous-matrices principales d'ordre k de $\mathbb{L}$ et $\mathbb{U}$ sont connues.
- Ecrire la fonction $[\mathbb{L}, \mathbb{U}] \leftarrow \text{factLU}(\mathbb{A})$ retournant les matrices $\mathbb{L}$ et $\mathbb{U}$ de $(\mathcal{P}_n)$ en utilisant les fonctions

R. 6

On note $\mathbb{A}_i$, $\mathbb{L}_i$ et $\mathbb{U}_i$ les sous-matrices principales d'ordre i , respectivement, des matrices $\mathbb{A}$, $\mathbb{L}$ et $\mathbb{U}$. Par hypothèse, on connaît $\mathbb{L}_{k-1}$ et $\mathbb{U}_{k-1}$. Comme $\mathbb{L}$ est tri. inf., pour calculer la ligne k de $\mathbb{L}$, il suffit de déterminer la ligne k de $\mathbb{L}_k$. Comme $\mathbb{U}$ est tri. sup., pour calculer la colonne k de $\mathbb{U}$, il suffit de déterminer la colonne k de $\mathbb{U}_k$.

a. Par construction, on a

$$\mathbb{A}_k = \mathbb{L}_k \mathbb{U}_k.$$

On pose

$$\mathbb{A}_k = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{A}_{k-1} & \mathbf{f} \\ \mathbf{e}^* & g \end{array} \right), \mathbb{L}_k = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{L}_{k-1} & \mathbb{O}_{k-1,1} \\ \mathbf{l}^* & 1 \end{array} \right) \text{ et } \mathbb{U}_k = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{U}_{k-1} & \mathbf{v} \\ \mathbb{O}_{1,k-1,1} & h \end{array} \right)$$

On peut noter que $\mathbf{e}^* = \mathbb{A}_{k,1:k-1} \in \mathcal{M}_{1,k-1}(\mathbb{C})$, $\mathbf{f} = \mathbb{A}_{1:k-1,k} \in \mathbb{C}^{k-1}$ et $g = \mathbb{A}_{k,k} \in \mathbb{C}$.

En reprenant les résultats de ..., on a alors, $\mathbf{v}$ et $\mathbf{e}^*$ solutions de

$$\mathbb{L}_{k-1} \mathbf{v} = \mathbf{f} \text{ et } \mathbf{l}^* \mathbb{U}_{n-1} = \mathbf{e}^*.$$

et

$$h = g - \mathbf{l}^* \mathbf{v}.$$

On en déduit, alors

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &\leftarrow \text{pSolveTril}(\mathbb{L}, \mathbb{A}_{1:k-1,k}) \\ \mathbf{l}^* &\leftarrow \text{pSolveTriurow}(\mathbb{U}, \mathbb{A}_{1,1:k-1}) \\ h &\leftarrow \mathbb{A}_{k,k} - \mathbf{l}^* \mathbf{v} \end{aligned}$$

On aura donc la ligne k de $\mathbb{L}$ donnée par

$$\mathbb{L}_{k,1:k-1} = \mathbf{l}^*, \mathbb{L}_{k,k} = 1, \mathbb{L}_{k,k+1:n} = 0$$

et la colonne k de $\mathbb{U}$ donnée par

$$\mathbb{U}_{1:k-1,k} = \mathbf{v}, \mathbb{U}_{k,k} = \mathbb{A}_{k,k} - \mathbf{l}^* \mathbf{v}, \mathbb{U}_{k+1:n,k} = 0.$$

b. Pour faciliter l'écriture, on initialisera la $\mathbb{L}$ à la matrice identité et $\mathbb{U}$ à la matrice nulle. Ensuite avec $\mathbb{U}_{1,1} \leftarrow \mathbb{A}_{1,1}$, on connaît les sous-matrices principales d'ordre 1 de $\mathbb{L}$ et $\mathbb{U}$, ce qui permet d'amorcer la récurrence.

Algorithme 3 Factorisation LU d'une matrice

Données : A : dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec toutes ses sous-matrices principales inversibles

Résultat : L : dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, tri. inf. à diag. unité,
 U : dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, tri. sup. inversible.

```
1: Fonction  $[L, U] \leftarrow \mathbf{FACTLU}(A)$ 
2:    $L \leftarrow \mathbb{I}_n$ 
3:    $U \leftarrow \mathbb{O}_n$ 
4:    $U(1, 1) \leftarrow A(1, 1)$ 
5:   Pour  $k \leftarrow 2$  à  $n$  faire
6:      $v \leftarrow \text{pSolveTril}(L, A(1 : k - 1, k))$ 
7:      $ls \leftarrow \text{pSolveTriurow}(U, A(1, 1 : k - 1))$   $\triangleright ls = l^*$ 
8:      $L(k, 1 : k - 1) \leftarrow ls$ 
9:      $U(1 : k - 1, k) \leftarrow v$ 
10:     $U(k, k) \leftarrow A(k, k) - ls * v$ 
11:   Fin Pour
12: Fin Fonction
```

EXERCICE 2 (9.75 points)

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé, non vide, (par ex., avec $a < b$, $[a, b]$, $[a, +\infty[$, $]-\infty, a]$ ou $\mathbb{R}$) et $\Phi : I \longrightarrow I$ une application contractante de rapport L .

Soit $x_0 \in I$ tel que $\Phi(x_0) \neq x_0$. On considère la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ donnée par

$$x_{k+1} = \Phi(x_k) \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Q. 1

Montrer que la suite (1) est bien définie (x_k existe pour tout $k \in \mathbb{N}$).

R. 1

La suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$, est bien définie si la relation (1) permet de définir complètement (et de manière unique) l'ensemble des termes de la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$, connaissant x_0 .

Il faut donc vérifier que, $\forall k \in \mathbb{N}$, $x_k \in I$, car il faut pouvoir calculer $\Phi(x_k)$.

C'est bien sur immédiat par récurrence car $\Phi(I) \subset I$. On propose toutefois une démonstration:

- Initialisation: pour $k = 0$. Par hypothèse, $x_0 \in I$.
- Hérédité: on suppose $x_k \in I$, montrons que $x_{k+1} \in I$. Par définition, $x_{k+1} = \Phi(x_k)$. Puisque par hypothèse, $\Phi(I) \subset I$, on a $x_{k+1} \in I$.

Q. 2

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

- a. Donner la définition de f est une application lipschitzienne sur I
- b. Donner la définition de f est une application contractante sur I
- c. Soit $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$, une suite de réels. Compléter la définition suivante:

la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0, \dots\dots\dots, |x_{k+p} - x_k| < \varepsilon.$$

R. 2

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

a. f est lipschitienne sur I si

$$\exists K \in \mathbb{R}_+, \forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|.$$

On dit alors que f est lipschitienne de rapport K sur I .

b. f est contractante sur I si elle est lipschitienne de rapport $K \in [0, 1[$ sur I c'est à dire si

$$\exists K \in [0, 1[, \forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|.$$

c.

$$\forall \epsilon > 0, \exists M \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall k \in \mathbb{N}, k \geq M, \forall p \in \mathbb{N}, |x_{k+p} - x_k| < \epsilon.$$

On va démontrer que la suite (1) est une suite de Cauchy. Pour celà, on va tout d'abord établir quelques résultats intermédiaires.

Q. 3

a. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, |x_{k+1} - x_k| \leq L^k |x_1 - x_0|. \quad (2)$$

b. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall s \geq 0, |x_{k+s} - x_{k+s-1}| \leq L^s |x_k - x_{k-1}|. \quad (3)$$

c. En déduire que,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall p \geq 2, |x_{k+p} - x_k| \leq \frac{1 - L^p}{1 - L} L^k |x_1 - x_0|. \quad (4)$$

R. 3

a. La fonction Φ étant contractante sur I , on a, par définition:

$$\exists L \in [0, 1[\text{ t.q. } \forall (x, y) \in I^2, |\Phi(x) - \Phi(y)| \leq L|x - y|.$$

On obtient alors

$$|x_{k+1} - x_k| = |\Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1})| \leq L|x_k - x_{k-1}|.$$

Par récurrence, on en déduit que la proposition suivante est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$(\mathcal{P}_k) : |x_{k+1} - x_k| \leq L^k |x_1 - x_0|.$$

On propose toutefois une démonstration:

- Initialisation: $(\mathcal{P}_0)$ est trivialement vraie.
- Hérédité: soit $k \in \mathbb{N}$, on suppose que $(\mathcal{P}_k)$ est vérifiée. Montrons que $(\mathcal{P}_{k+1})$ est vraie. On a, en utilisant (1) et l'hypothèse de contraction sur Φ ,

$$|x_{k+2} - x_{k+1}| = |\Phi(x_{k+1}) - \Phi(x_k)| \leq L|x_{k+1} - x_k|.$$

Par hypothèse de récurrence, on en déduit

$$|x_{k+2} - x_{k+1}| \leq LL^k |x_1 - x_0|$$

et donc $(\mathcal{P}_{k+1})$ est vraie.

b. Soit $k \in \mathbb{N}$. On va montrer, par récurrence la proposition

$$(\mathcal{Q}_l) : |x_{k+l} - x_{k+l-1}| \leq L^l |x_k - x_{k-1}|$$

pour tout $l \in \mathbb{N}$.

- Initialisation: $(\mathcal{Q}_0)$ est trivialement vraie.
- Hérédité: soit $l \in \mathbb{N}$, on suppose que $(\mathcal{Q}_l)$ est vérifiée. Montrons que $(\mathcal{Q}_{l+1})$ est vraie. Comme Φ est contractante, on a

$$|x_{k+l+1} - x_{k+l}| = |\Phi(x_{k+l}) - \Phi(x_{k+l-1})| \leq L |x_{k+l} - x_{k+l-1}|.$$

En utilisant, l'hypothèse de récurrence, on en déduit

$$|x_{k+l+1} - x_{k+l}| \leq L L^l |x_k - x_{k-1}| = L^{l+1} |x_k - x_{k-1}|.$$

La proposition $(\mathcal{Q}_{l+1})$ est donc vraie.

- Conclusion: on a démontré par récurrence que $(\mathcal{Q}_l)$ est vraie pour tout $l \in \mathbb{N}$.

c. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $p \geq 2$. On a

$$|x_{k+p} - x_k| = |(x_{k+p} - x_{k+p-1}) + (x_{k+p-1} - x_{k+p-2}) + \dots + (x_{k+1} - x_k)| = \left| \sum_{l=0}^{p-1} (x_{k+l+1} - x_{k+l}) \right|.$$

Par application répétée de l'inégalité triangulaire, on obtient

$$|x_{k+p} - x_k| \leq \sum_{s=1}^p |x_{k+s} - x_{k+s-1}|$$

En utilisant (3), on obtient alors

$$|x_{k+p} - x_k| \leq \sum_{s=1}^p L^s |x_k - x_{k-1}|$$

En utilisant (2), on a alors

$$|x_{k+p} - x_k| \leq \sum_{s=1}^p L^s L^{k-1} |x_1 - x_0| = |x_1 - x_0| L^k \sum_{l=0}^{p-1} L^l.$$

Cette dernière somme correspond alors à une somme partielle d'une série géométrique et donc

$$|x_{k+p} - x_k| \leq \frac{1 - L^p}{1 - L} L^k |x_1 - x_0|.$$

Q. 4

- En utilisant les résultats de la question précédente, démontrer de **manière détaillée** que la suite (1) est une suite de Cauchy.
- Montrer que la suite (1) converge vers un point fixe de Φ à l'ordre 1 au moins.
- Montrer l'unicité du point fixe.

- a. On a $0 \leq L < 1$, et donc $L^k \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow +\infty$. De (4), on déduit alors que $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

On propose toutefois une démonstration détaillée.

Pour que $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ soit une suite de Cauchy, il faut montrer que

$$\forall \epsilon > 0, \exists M \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall k \in \mathbb{N}, k \geq M, \forall p \in \mathbb{N}, |x_{k+p} - x_k| < \epsilon.$$

Comme $0 < L < 1$, on déduit de (4) en utilisant (2)

$$|x_{k+p} - x_k| \leq \frac{1}{1-L} L^k |x_1 - x_0|$$

Soit $\epsilon > 0$, pour avoir $|x_{k+p} - x_k| < \epsilon$, il est suffisant d'avoir

$$\frac{1}{1-L} L^k |x_1 - x_0| < \epsilon$$

c'est à dire, comme $1 - L > 0$ et $x_1 = \Phi(x_0) \neq x_0$

$$L^k < \frac{(1-L)\epsilon}{|x_1 - x_0|}.$$

La fonction $\ln$ étant croissante strictement on obtient

$$\ln(L^k) = k \ln(L) < \ln\left(\frac{(1-L)\epsilon}{|x_1 - x_0|}\right).$$

Or $\ln(L) < 0$, ce qui donne

$$k > \frac{1}{\ln(L)} \ln\left(\frac{(1-L)\epsilon}{|x_1 - x_0|}\right).$$

En prenant $M \in \mathbb{N}$ tel que

$$M > \frac{1}{\ln(L)} \ln\left(\frac{(1-L)\epsilon}{|x_1 - x_0|}\right)$$

alors

$$\forall k \in \mathbb{N}, k \geq M, \forall p \in \mathbb{N}, |x_{k+p} - x_k| < \epsilon.$$

- b. La suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ espace complet donc elle converge dans $\mathbb{R}$ vers un point que l'on nomme β . De plus pour tout k , x_k appartient à I fermé, donc sa limite β appartient aussi à I .

La fonction Φ étant contractante sur I , elle est donc continue sur I . On a alors par continuité de Φ

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \Phi(x_k) = \Phi(\beta).$$

Comme $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ on aussi

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \Phi(x_k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} x_{k+1} = \beta$$

et donc β est un point fixe de Φ . L'existence d'un point fixe est donc établi.

On a donc

$$|x_{k+1} - \beta| = |\Phi(x_k) - \Phi(\beta)| \leq L|x_k - \beta|.$$

Comme $0 \leq L < 1$, la convergence est au moins d'ordre 1.

- c. On suppose qu'il existe β_1 et β_2 dans $[a, b]$ tels que $\Phi(\beta_1) = \beta_1$ et $\Phi(\beta_2) = \beta_2$. Dans ce cas on a

$$|\beta_1 - \beta_2| = |\Phi(\beta_1) - \Phi(\beta_2)| \leq L|\beta_1 - \beta_2|.$$

On en déduit

$$(1-L)|\beta_1 - \beta_2| \leq 0$$

Comme $1 - L > 0$, on en déduit $\beta_1 = \beta_2$, c'est à dire l'unicité du point fixe.

Q. 5

Soient $J = [0, +\infty[$ et $g \in \mathcal{C}^\infty(J; \mathbb{R})$. On note $x_{k+1} = g(x_k)$, $k \in \mathbb{N}$ avec $x_0 \in J$.

- A quelle(s) condition(s) sur la dérivée de g , la fonction g est-elle contractante sur J ? Justifiez.
- On suppose g contractante sur J . A quelle(s) condition(s), s'il y en a, a-t-on existence et unicité d'un point fixe de g dans J .
- On suppose réunies les conditions pour que g ai un unique point fixe, noté α , dans J et que la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge à l'ordre 1 au moins vers α .
A quelle(s) condition(s) sur g , la suite converge t'elle
 - à l'ordre 1 exactement?
 - à l'ordre 2 au moins?
 - à l'ordre 2 exactement?

R. 5

- La fonction est contractante sur J si

$$\forall x \in J, |g'(x)| \leq K < 1.$$

En effet, soient $(x, y) \in J^2$, d'après la formule de Taylor à l'ordre 1, il existe $\xi \in]\min(x, y), \max(x, y)[$ tel que

$$g(x) - g(y) = (x - y)g'(\xi)$$

Dans ce cas on a immédiatement la contraction:

$$|g(x) - g(y)| = |x - y||g'(\xi)| \leq K|x - y|.$$

Attention, ici prendre comme condition

$$\forall x \in J, |g'(x)| < 1$$

n'est pas suffisant car on peut avoir $|g'(x)| \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$.

- Il faut que $g(J) \subset J$.

- On a la convergence

- à l'ordre 1 exactement, si $g'(\alpha) \neq 0$. (et convergence si $|g'(\alpha)| < 1$)
- à l'ordre 2 au moins, si $g'(\alpha) = 0$.
- à l'ordre 2 exactement si $g'(\alpha) = 0$ et $g''(\alpha) \neq 0$.

Soit $f(x) = 2x^3 - x^2 - 2x + 1$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ de racines -1 , 1 et $\frac{1}{2}$. On cherche à déterminer ces racines par l'algorithme du point fixe.

Q. 6

On pose $g_1(x) = x + f(x)$ et $g_2(x) = x - \frac{1}{2}f(x)$.

- Montrer que $f(x) = 0 \Leftrightarrow g_1(x) = x$ et $f(x) = 0 \Leftrightarrow g_2(x) = x$.
- Que peut-on dire de la suite $x_{k+1} = g_1(x_k)$, $k \in \mathbb{N}$ lorsque x_0 est proche de -1 ? proche de 1 ? proche de $\frac{1}{2}$? En cas de convergence, on précisera l'ordre exact de convergence en justifiant.
- Que peut-on dire de la suite $x_{k+1} = g_2(x_k)$, $k \in \mathbb{N}$ lorsque x_0 est proche de -1 ? proche de 1 ? proche de $\frac{1}{2}$? En cas de convergence, on précisera l'ordre exact de convergence en justifiant.

a. On a

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x + f(x) = x \Leftrightarrow g_1(x) = x$$

et

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -x + f(x) = -x \Leftrightarrow -g_2(x) = -x \Leftrightarrow g_2(x) = x$$

b. On a $g'_1(x) = 2(2x - 1)x + 2x^2 - 1$ et

$$g'_1(-1) = 7, \quad g'_1(1) = 3 \text{ et } g'_1\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Pour avoir convergence au voisinage d'une des racines α , il faut que $|g'_1(\alpha)| < 1$. Dans ce cas, on aura une convergence d'ordre 1 exactement si $g'_1(\alpha) \neq 0$, sinon elle sera d'ordre 2 au moins.

- pour x_0 proche de -1 , la suite va diverger car $|g'_1(-1)| = 7 \geq 1$.
- pour x_0 proche de 1 , la suite va diverger car $|g'_1(1)| = 3 \geq 1$.
- pour x_0 proche de $\frac{1}{2}$, la suite va converger vers $\frac{1}{2}$ car $|g'_1(\frac{1}{2})| = \frac{1}{2} < 1$. Comme $g'_1(\frac{1}{2}) \neq 0$, la convergence sera exactement d'ordre 1.

c. On a $g'_2(x) = -(2x - 1)x - x^2 + 2$ et

$$g'_2(-1) = -2, \quad g'_2(1) = 0 \text{ et } g'_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{4}.$$

On a $g''_2(x) = -6x + 1$ et

$$g''_2(-1) = 7, \quad g''_2(1) = -5 \text{ et } g''_2\left(\frac{1}{2}\right) = -2.$$

Pour avoir convergence au voisinage d'une des racines α , il faut que $|g'_2(\alpha)| < 1$. Dans ce cas, on aura une convergence d'ordre 1 exactement si $g'_2(\alpha) \neq 0$, sinon elle sera d'ordre 2 au moins (exactement si $g''_2(\alpha) \neq 0$).

- pour x_0 proche de -1 , la suite va diverger car $|g'_2(-1)| = 2 \geq 1$.
- pour x_0 proche de 1 , la suite va converger vers 1 car $|g'_2(1)| = 0 < 1$. La convergence sera au moins d'ordre 2 car $g'_2(1) = 0$. Comme $g''_2(1) \neq 0$, la convergence sera exactement d'ordre 2.
- pour x_0 proche de $\frac{1}{2}$, la suite va diverger car $|g'_2(\frac{1}{2})| = \frac{7}{4} \geq 1$.