

PARTIEL DU 7 JANVIER 2026¹
durée : 3h00.

Sans documents et sans appareils électroniques

Le barème est donné à titre indicatif

Dans ce sujet:

- Les trois exercices sont indépendants.
- Les entrées/sorties des fonctions algorithmiques que vous écrirez devront être décrites.
- Le but de toute fonction algorithmique que vous écrirez, et qui n'est pas explicitement demandée, devra être précisé.

EXERCICE 1 (6.0 points)

Soient $(t_i)_{i=0}^n$ les $(n+1)$ racines distinctes du polynôme de Legendre de degré $(n+1)$. Ces racines sont les valeurs propres de la matrice

$$\mathbb{L} = \begin{pmatrix} 0 & c_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ c_1 & 0 & c_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & c_{n-1} & 0 & c_n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & c_n & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec } c_k = \sqrt{\frac{k^2}{4k^2 - 1}}, \quad k \in \llbracket 1, n \rrbracket. \quad (1)$$

Soient a, b deux réels, $a < b$, et $n \in \mathbb{N}$. On note $x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t_i$, $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et $(w_i)_{i=0}^n$ les $(n+1)$ poids obtenus en résolvant le système linéaire

$$(b-a) \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-a \\ \frac{b^2-a^2}{2} \\ \vdots \\ \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1} \end{pmatrix} \quad (2)$$

Soient $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et la formule de quadrature élémentaire de Gauss-Legendre donnée par

$$\mathcal{Q}_n(f, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b-a) \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) \approx \int_a^b f(x) dx. \quad (3)$$

C'est l'unique formule de quadrature élémentaire à $(n+1)$ points ayant pour degré d'exactitude $(2n+1)$. On dispose au niveau algorithmique des deux fonctions :

- $\mathbf{x} \leftarrow \text{Solve}(\mathbb{A}, \mathbf{b})$ résolvant le système linéaire $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ où $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible et $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.
- $\boldsymbol{\lambda} \leftarrow \text{Eig}(\mathbb{A})$ retournant les n valeurs propres de la matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

¹Compilé le 2026/01/04 à 09:19:44.

Q. 1

- a. Ecrire une fonction **genWeights** retournant les poids $(w_i)_{i=0}^n$ à partir de points $(x_i)_{i=0}^n$ quelconques dans $[a, b]$, distincts 2 à 2.
- b. Ecrire une fonction **GLpoints** retournant les points $(x_i)_{i=0}^n$ tels que

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t_i, \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket.$$

- c. Ecrire une fonction **GLquad** retournant $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$.

Soient A, B deux réels, $A < B$, $N \in \mathbb{N}$ et $g : [A, B] \longrightarrow \mathbb{R}$. On note $(\alpha_j)_{j=0}^N$ une discrétisation régulière de l'intervalle $[A, B]$:

$$\alpha_j = A + jH, \quad j \in \llbracket 0, N \rrbracket, \quad H = (B - A)/N.$$

La **méthode de quadrature composée associée à $\mathcal{Q}_n$** , notée $\mathcal{Q}_{N,n}^{\text{comp}}$, est donnée par

$$\mathcal{Q}_{N,n}^{\text{comp}}(g, A, B) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N \mathcal{Q}_n(g, \alpha_{i-1}, \alpha_i) \approx \int_A^B g(x)dx = \sum_{i=1}^N \int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} g(x)dx \quad (4)$$

Cette formule de quadrature composée a pour degré d'exactitude $(2n + 1)$.

Q. 2

- a. Ecrire une fonction **GLquadcomp** retournant $\mathcal{Q}_{N,n}^{\text{comp}}(g, A, B)$ sans aucune optimisation.
- b. Ecrire un programme permettant de vérifier que $\mathcal{Q}_{N,n}^{\text{comp}}$ a pour degré d'exactitude $(2n + 1)$, la valeur de n étant supposée donnée par l'utilisateur.

EXERCICE 2 (6.75 points)

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne définie positive et $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$.

Q. 1

- a. Rappeler la définition d'une matrice hermitienne définie positive.
- b. Démontrer que tous les éléments diagonaux de $\mathbb{A}$ sont dans $\mathbb{R}_+^*$.
- c. Démontrer que toutes les valeurs propres de $\mathbb{A}$ sont dans $\mathbb{R}_+^*$.
- d. En déduire que $\mathbb{A}$ est inversible.

On note $\mathbf{x}$ la solution de $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ et on décompose la matrice $\mathbb{A}$ sous la forme $\mathbb{A} = \mathbb{D} - \mathbb{E} - \mathbb{F}$ où $\mathbb{D} = \text{diag}(\mathbb{A})$ est la matrice diagonale telle que, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $D_{i,i} = A_{i,i}$, $\mathbb{E}$ est triangulaire inférieure d'éléments diagonaux nuls, et, $\mathbb{F}$ est triangulaire supérieure d'éléments diagonaux nuls.

On va étudier une méthode itérative pour la résolution du système linéaire $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Soit $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{C}^n$ donné. On définit la suite de vecteurs $(\mathbf{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ appartenant à $\mathbb{C}^n$ par, $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$(\mathbb{D} - \mathbb{E})\mathbf{x}_{k+1/2} = \mathbb{F}\mathbf{x}_k + \mathbf{b} \quad (1)$$

$$(\mathbb{D} - \mathbb{F})\mathbf{x}_{k+1} = \mathbb{E}\mathbf{x}_{k+1/2} + \mathbf{b} \quad (2)$$

Q. 2

- a. Démontrer, en justifiant toutes les opérations utilisées, que le vecteur $\mathbf{x}_{k+1}$ peut s'écrire sous la forme

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbb{B}\mathbf{x}_k + \mathbf{c} \quad (3)$$

en déterminant le vecteur $\mathbf{c}$ et en montrant que

$$\mathbb{B} = (\mathbb{D} - \mathbb{F})^{-1}\mathbb{E}(\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1}\mathbb{F}.$$

- b. Montrer que

$$\mathbf{x}_{k+1} - \underline{\mathbf{x}} = \mathbb{B}(\mathbf{x}_k - \underline{\mathbf{x}}).$$

- c. Montrer que

$$\mathbb{D}^{-1} = (\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1} - \mathbb{D}^{-1}\mathbb{E}(\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1}. \quad (4)$$

Soit $(\lambda, \mathbf{p})$ un élément propre de la matrice $\mathbb{B}$.

Q. 3

- a. En utilisant (4), montrer que l'on a

$$\left((\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1} - \mathbb{D}^{-1}\right)\mathbb{F}\mathbf{p} = \lambda\mathbb{D}^{-1}(\mathbb{D} - \mathbb{F})\mathbf{p} \quad (5)$$

- b. En déduire que

$$\lambda\mathbb{A}\mathbf{p} + (\lambda - 1)\mathbb{E}\mathbb{D}^{-1}\mathbb{F}\mathbf{p} = 0. \quad (6)$$

- c. En déduire que

$$\lambda = \frac{\langle \mathbb{F}\mathbf{p}, \mathbb{D}^{-1}\mathbb{F}\mathbf{p} \rangle}{\langle \mathbf{p}, \mathbb{A}\mathbf{p} \rangle + \langle \mathbb{F}\mathbf{p}, \mathbb{D}^{-1}\mathbb{F}\mathbf{p} \rangle}$$

et $\lambda \in [0, 1[$.

- d. En déduire la convergence de la suite $(\mathbf{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ vers $\underline{\mathbf{x}}$.

EXERCICE 3 (7.25 points)

Q. 1

Soient I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

- a. Soit $f \in \mathcal{C}^0(I; \mathbb{R})$, avec f dérivable sur I . On suppose qu'il existe $(x_i)_{i=0}^n$ dans I , avec $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, tels que

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad f(x_i) = 0.$$

Montrer qu'il existe $(\xi_i)_{i=1}^n$ dans I , avec $x_0 < \xi_1 < x_1 < \xi_2 < x_2 < \dots < \xi_n < x_n$, tels que

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad f^{(1)}(\xi_i) = 0.$$

- b. Démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la proposition suivante

$(\mathcal{P}_n)$

Soit $f \in \mathcal{C}^{n-1}(I; \mathbb{R})$, $f^{(n-1)}$ dérivable sur I . Si f admet au moins $(n+1)$ zéros distincts dans I , notés $x_0 < \dots < x_n$, alors $f^{(n)}$ admet au moins un zéro dans $]x_0, x_n[$.

Q. 2

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(n+1)$ couples de $\mathbb{R}^2$, $(x_i, y_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$, tels que les x_i sont distincts deux à deux.

a. Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Montrer qu'il existe un unique polynôme L_i de degré n vérifiant

$$L_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad \forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket. \quad (1)$$

b. Montrer que les $(L_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$ (espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n).

c. Le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux $(n+1)$ couples $(x_i, y_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est alors donné par

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(x) \quad \text{avec} \quad L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}. \quad (2)$$

Montrer que le polynôme P_n est l'unique polynôme de degré au plus n vérifiant $P_n(x_i) = y_i$, $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a; b]; \mathbb{R})$ et $(n+1)$ couples de $\mathbb{R}^2$, $(x_i, y_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$, tels que les $x_i \in [a; b]$ sont distincts deux à deux et $y_i = f(x_i)$.

On note par P_n le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux couples $(x_i, y_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ et π_n le polynôme défini par

$$\pi_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=0}^n (x - x_i).$$

Q. 3

Soit $x \in [a; b]$ tel que, pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $x \neq x_i$. On note

$$x_{\min} = \min(x, x_0, \dots, x_n), \quad x_{\max} = \max(x, x_0, \dots, x_n),$$

et

$$F(t) = f(t) - P_n(t) - \frac{f(x) - P_n(x)}{\pi_n(x)} \pi_n(t).$$

a. Démontrer que F est définie sur $[a; b]$ et admet $(n+2)$ racines distinctes.

b. Montrer qu'il existe $\xi_x \in]x_{\min}; x_{\max}[$ tel que $F^{(n+1)}(\xi_x) = 0$.

c. En déduire que

$$f(x) - P_n(x) = \frac{\pi_n(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x). \quad (3)$$

Q. 4

Montrer que, $\forall x \in [a; b]$, il existe ξ_x appartenant au plus petit intervalle ouvert contenant $x, x_0, \dots, x_n$ vérifiant (3)

Q. 5 (Algo)

Ecrire une fonction **Lagrange** permettant de retourner $P_n(x)$.