

PARTIEL DU 7 JANVIER 2026¹
durée : 3h00.

Sans documents et sans appareils électroniques
Le barème est donné à titre indicatif

Dans ce sujet:

- Les trois exercices sont indépendants.
- Les entrées/sorties des fonctions algorithmiques que vous écrirez devront être décrites.
- Le but de toute fonction algorithmique que vous écrirez, et qui n'est pas explicitement demandée, devra être précisé.

EXERCICE 1 (6.0 points)

Soient $(t_i)_{i=0}^n$ les $(n+1)$ racines distinctes du polynôme de Legendre de degré $(n+1)$. Ces racines sont les valeurs propres de la matrice

$$\mathbb{L} = \begin{pmatrix} 0 & c_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ c_1 & 0 & c_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & c_{n-1} & 0 & c_n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & c_n & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad c_k = \sqrt{\frac{k^2}{4k^2 - 1}}, \quad k \in \llbracket 1, n \rrbracket. \quad (1)$$

Soient a, b deux réels, $a < b$, et $n \in \mathbb{N}$. On note $x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t_i$, $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et $(w_i)_{i=0}^n$ les $(n+1)$ poids obtenus en résolvant le système linéaire

$$(b-a) \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-a \\ \frac{b^2-a^2}{2} \\ \vdots \\ \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1} \end{pmatrix} \quad (2)$$

Soient $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et la formule de quadrature élémentaire de Gauss-Legendre donnée par

$$\mathcal{Q}_n(f, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b-a) \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) \approx \int_a^b f(x) dx. \quad (3)$$

C'est l'unique formule de quadrature élémentaire à $(n+1)$ points ayant pour degré d'exactitude $(2n+1)$. On dispose au niveau algorithmique des deux fonctions :

- $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{Solve}(\mathbb{A}, \mathbf{b})$ résolvant le système linéaire $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ où $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible et $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.
- $\boldsymbol{\lambda} \leftarrow \mathbf{Eig}(\mathbb{A})$ retournant les n valeurs propres de la matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

¹Compilé le 2026/02/02 à 07:56:35.

Q. 1

- a. Ecrire une fonction **genWeights** retournant les poids $(w_i)_{i=0}^n$ à partir de points $(x_i)_{i=0}^n$ quelconques dans $[a, b]$, distincts 2 à 2.
- b. Ecrire une fonction **GLpoints** retournant les points $(x_i)_{i=0}^n$ tels que

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t_i, \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket.$$

- c. Ecrire une fonction **GLquad** retournant $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$.

R. 1

- a. Voici un exemple de fonction:

Algorithme 1 Fonction **genWeights** retournant le tableau des poids $\mathbf{w}$ associé à un tableau de points $\mathbf{X}$ donnés (points 2 à 2 distincts) appartenant à un intervalle $[a, b]$.

Données : $\mathbf{X}$: tableau de $\mathbb{R}^{n+1}$ contenant $(n+1)$ points distincts deux à deux dans un intervalle $[a, b]$ avec la convention $\mathbf{x}(i) = x_{i-1}, \forall i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$
 a, b : deux réels, $a < b$.

Résultat : $\mathbf{W}$: vecteur de $\mathbb{R}^{n+1}$ avec $\mathbf{W}(i) = w_{i-1}, \forall i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$

```
1: Fonction  $\mathbf{W} \leftarrow \text{GENWEIGHTS}(\mathbf{X}, a, b)$ 
2:    $\mathbf{B} \leftarrow \mathbf{O}_{n+1}$ 
3:    $\mathbb{A} \leftarrow \mathbb{O}_{n+1, n+1}$ 
4:   Pour  $i \leftarrow 1$  à  $n+1$  faire
5:     Pour  $j \leftarrow 1$  à  $n+1$  faire
6:        $\mathbb{A}(i, j) \leftarrow \mathbf{X}(j)^\wedge(i-1)$ 
7:     Fin Pour
8:      $\mathbf{B}(i) \leftarrow (b^\wedge i - a^\wedge i) / (i * (b - a))$ 
9:   Fin Pour
10:   $\mathbf{W} \leftarrow \text{Solve}(\mathbb{A}, \mathbf{B})$ 
11: Fin Fonction
```

- b. Voici un exemple de fonction:

Algorithme 2 Fonction GLpoints retournant le tableau des $(n + 1)$ points $\mathbf{X}$ (dans l'intervalle $[a, b]$ et distincts 2 à 2) tels que ...

Données : n : $n \in \mathbb{N}$
 a, b : deux réels, $a < b$.

Résultat : $\mathbf{X}$: vecteur de $\mathbb{R}^{n+1}$ avec $\mathbf{x}(i) = x_{i-1}$, $\forall i \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket$

```

1: Fonction  $\mathbf{X} \leftarrow \mathbf{GLPOINTS}(a, b, n)$ 
2:  $\mathbb{A} \leftarrow \mathbb{O}_{n+1, n+1}$ 
3: Pour  $k \leftarrow 1$  à  $n$  faire
4:    $c \leftarrow \text{sqrt}(k^2 / (4 * k^2 - 1))$ 
5:    $\mathbb{A}(k, k + 1) \leftarrow c$ 
6:    $\mathbb{A}(k + 1, k) \leftarrow c$ 
7: Fin Pour
8:  $\mathbf{t} \leftarrow \text{Eig}(\mathbb{A})$ 
9:  $\mathbf{X} \leftarrow (a + b)/2 + (b - a)/2 * \mathbf{t}$  ▷ Opération vectorielle
10: Fin Fonction

```

c. Voici un exemple de fonction:

Algorithme 3 Fonction GLquad retourne la valeur de $I = (b - a) \sum_{j=0}^n w_j f(x_j)$...

Données : f : une fonction définie de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$,
 a, b : deux réels avec $a < b$,
 n : un entier.

Résultat : I : un réel.

```

1: Fonction  $I \leftarrow \mathbf{GLQUAD}(f, a, b, n)$ 
2:  $\mathbf{X} \leftarrow \mathbf{GLpoints}(a, b, n)$ 
3:  $\mathbf{W} \leftarrow \text{genWeights}(\mathbf{X}, a, b)$ 
4:  $I \leftarrow 0$ 
5: Pour  $i \leftarrow 1$  à  $n + 1$  faire
6:    $I \leftarrow I + \mathbf{w}(i) * f(\mathbf{x}(i))$ 
7: Fin Pour
8:  $I \leftarrow (b - a) * I$ 
9: Fin Fonction

```

Soient A, B deux réels, $A < B$, $N \in \mathbb{N}$ et $g : [A, B] \rightarrow \mathbb{R}$. On note $(\alpha_j)_{j=0}^N$ une discrétisation régulière de l'intervalle $[A, B]$:

$$\alpha_j = A + jH, \quad j \in \llbracket 0, N \rrbracket, \quad H = (B - A)/N.$$

La **méthode de quadrature composée associée à $\mathcal{Q}_n$** , notée $\mathcal{Q}_{N,n}^{\text{comp}}$, est donnée par

$$\mathcal{Q}_{N,n}^{\text{comp}}(g, A, B) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N \mathcal{Q}_n(g, \alpha_{i-1}, \alpha_i) \approx \int_A^B g(x) dx = \sum_{i=1}^N \int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} g(x) dx \quad (4)$$

Cette formule de quadrature composée a pour degré d'exactitude $(2n + 1)$.

Q. 2

- a. Ecrire une fonction **GLquadcomp** retournant $\mathcal{Q}_{N,n}^{\text{comp}}(g, A, B)$ sans aucune optimisation.
- b. Ecrire un programme permettant de vérifier que $\mathcal{Q}_{N,n}^{\text{comp}}$ a pour degré d'exactitude $(2n + 1)$, la valeur de n étant supposée donnée par l'utilisateur.

R. 2

a. Voici un exemple de fonction:

Algorithme 4 Fonction GLquadcomp ...

Données : g : une fonction définie de $[A, B]$ dans $\mathbb{R}$,
 A, B : deux réels avec $A < B$,
 n : un entier,
 N : un entier non nul (pour Chasles).

Résultat : I : un réel.

```

1: Fonction  $I \leftarrow \mathbf{GLQUADCOMP}(g, A, B, n, N)$ 
2:    $\alpha \leftarrow \text{DisReg}(A, B, N)$                                  $\triangleright$  discretisation régulière  $(N + 1)$  points
3:    $I \leftarrow 0$ 
4:   Pour  $k \leftarrow 1$  à  $N$  faire
5:      $I \leftarrow \text{GLquad}(g, \alpha(k), \alpha(k + 1), n)$ 
6:   Fin Pour
7: Fin Fonction

```

b. Voici un exemple de programme:

```

1:  $a \leftarrow -1, b \leftarrow 2$ 
2:  $n \leftarrow 3, N \leftarrow 10$                                  $\triangleright$  Choix utilisateur
3: Pour  $k \leftarrow 0$  à  $10$  faire
4:    $g : x \mapsto x^k$                                            $\triangleright$  On définit la fonction de  $g$ 
5:    $G : x \mapsto x^{k+1}/(k + 1)$                                  $\triangleright$  Primitive de  $g$ 
6:    $I \leftarrow \text{GLquadcomp}(g, a, b, n, N)$                      $\triangleright$  Intégration numérique par Gauss-Legendre composite
7:    $Iex \leftarrow G(b) - G(a)$                                      $\triangleright$  Intégrale exacte
8:    $E \leftarrow \text{abs}(I - Iex)/(\text{abs}(Iex) + 1)$                  $\triangleright$  Erreur relative
9:   Si  $E < 1e - 14$  alors
10:    Affiche : "exacte pour le monome  $x^k$ " avec la valeur de  $k$ 
11:   Sinon
12:    Affiche : "non exacte pour le monome  $x^k$ " avec la valeur de  $k$ 
13:   Fin Si
14: Fin Pour

```

EXERCICE 2 (6.75 points)

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne définie positive et $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$.

Q. 1

- a. Rappeler la définition d'une matrice hermitienne définie positive.
- b. Démontrer que tous les éléments diagonaux de $\mathbb{A}$ sont dans $\mathbb{R}_+^*$.
- c. Démontrer que toutes les valeurs propres de $\mathbb{A}$ sont dans $\mathbb{R}_+^*$.
- d. En déduire que $\mathbb{A}$ est inversible.

a. $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une matrice hermitienne définie positive si

- $\mathbb{A} = \mathbb{A}^*$
- $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \quad \langle \mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \in \mathbb{R}_+^*$.

$\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$.

b. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $\mathbf{e}_i \in \mathbb{C}^n$, le i -ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^n$. On a

$$\langle \mathbf{e}_i, \mathbb{A}\mathbf{e}_i \rangle = A_{i,i}.$$

La matrice $\mathbb{A}$ étant hermitienne, on a

$$\langle \mathbf{e}_i, \mathbb{A}\mathbf{e}_i \rangle = \langle \mathbb{A}\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i \rangle$$

De plus $\mathbb{A}$ est hermitienne définie positive, et, comme $\mathbf{e}_i \neq \mathbf{0}$, on en déduit

$$\langle \mathbb{A}\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i \rangle > 0$$

et donc $A_{i,i} > 0$.

c. Soit $(\lambda, \mathbf{u}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ un élément propre de $\mathbb{A}$. On a

$$\langle \mathbb{A}\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \langle \lambda\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \bar{\lambda} \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$$

et

$$\langle \mathbf{u}, \mathbb{A}\mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u}, \lambda\mathbf{u} \rangle = \lambda \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle.$$

Or $\mathbb{A}$ est hermitienne, donc on a

$$\langle \mathbb{A}\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbb{A}^*\mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbb{A}\mathbf{u} \rangle.$$

On en déduit que

$$\bar{\lambda} \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \lambda \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle.$$

le vecteur $\mathbf{u}$ étant non nul, on a $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \|\mathbf{u}\|_2^2 \neq 0$ et donc $\lambda = \bar{\lambda}$, c'est à dire $\lambda \in \mathbb{R}$.

De plus, $\mathbb{A}$ est définie positive entraîne que

$$\lambda \|\mathbf{u}\|_2^2 = \langle \mathbb{A}\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle > 0$$

et donc $\lambda > 0$.

d. Comme toutes les valeurs propres de $\mathbb{A}$ sont non nulles (puisque strictement positives), $\mathbb{A}$ est inversible.

On note $\underline{\mathbf{x}}$ la solution de $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ et on décompose la matrice $\mathbb{A}$ sous la forme $\mathbb{A} = \mathbb{D} - \mathbb{E} - \mathbb{F}$ où $\mathbb{D} = \text{diag}(\mathbb{A})$ est la matrice diagonale telle que, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $D_{i,i} = A_{i,i}$, $\mathbb{E}$ est triangulaire inférieure d'éléments diagonaux nuls, et, $\mathbb{F}$ est triangulaire supérieure d'éléments diagonaux nuls.

On va étudier une méthode itérative pour la résolution du système linéaire $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Soit $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{C}^n$ donné. On définit la suite de vecteurs $(\mathbf{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ appartenant à $\mathbb{C}^n$ par, $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$(\mathbb{D} - \mathbb{E})\mathbf{x}_{k+1/2} = \mathbb{F}\mathbf{x}_k + \mathbf{b} \tag{1}$$

$$(\mathbb{D} - \mathbb{F})\mathbf{x}_{k+1} = \mathbb{E}\mathbf{x}_{k+1/2} + \mathbf{b} \tag{2}$$

a. Démontrer, en justifiant toutes les opérations utilisées, que le vecteur $\mathbf{x}_{k+1}$ peut s'écrire sous la forme

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbb{B}\mathbf{x}_k + \mathbf{c} \quad (3)$$

en déterminant le vecteur $\mathbf{c}$ et en montrant que

$$\mathbb{B} = (\mathbb{D} - \mathbb{F})^{-1}\mathbb{E}(\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1}\mathbb{F}.$$

b. Montrer que

$$\mathbf{x}_{k+1} - \underline{\mathbf{x}} = \mathbb{B}(\mathbf{x}_k - \underline{\mathbf{x}}).$$

c. Montrer que

$$\mathbb{D}^{-1} = (\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1} - \mathbb{D}^{-1}\mathbb{E}(\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1}. \quad (4)$$

a. La matrice diagonale $\mathbb{D}$ est inversible car, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $D_{i,i} = A_{i,i} > 0$.

On en déduit que les matrices $\mathbb{D} - \mathbb{E}$ (triangulaire inférieure de diagonale la diagonale de $\mathbb{D}$) et $\mathbb{D} - \mathbb{F}$ (triangulaire supérieure de diagonale la diagonale de $\mathbb{D}$) sont inversibles.

De (1), on obtient en multipliant à gauche par $(\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1}$

$$\mathbf{x}_{k+1/2} = (\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1}\mathbb{F}\mathbf{x}_k + (\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1}\mathbf{b}.$$

En remplaçant cette expression de $\mathbf{x}_{k+1/2}$ dans (2), on a

$$\begin{aligned} (\mathbb{D} - \mathbb{F})\mathbf{x}_{k+1} &= \mathbb{E} \left((\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1}\mathbb{F}\mathbf{x}_k + (\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1}\mathbf{b} \right) + \mathbf{b} \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1}\mathbb{F}\mathbf{x}_k + \left(\mathbb{E}(\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1} + \mathbb{I} \right) \mathbf{b} \end{aligned}$$

En multipliant à gauche cette équation par $(\mathbb{D} - \mathbb{F})^{-1}$, on abouti a

$$\mathbf{x}_{k+1} = (\mathbb{D} - \mathbb{F})^{-1}\mathbb{E}(\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1}\mathbb{F}\mathbf{x}_k + (\mathbb{D} - \mathbb{F})^{-1} \left(\mathbb{E}(\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1} + \mathbb{I} \right) \mathbf{b}$$

En posant

$$\begin{aligned} \mathbb{B} &= (\mathbb{D} - \mathbb{F})^{-1}\mathbb{E}(\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1}\mathbb{F} \\ \mathbf{c} &= (\mathbb{D} - \mathbb{F})^{-1} \left(\mathbb{E}(\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1} + \mathbb{I} \right) \mathbf{b} \end{aligned}$$

on obtient (3).

b. La matrice $\mathbb{A}$ est inversible et donc $\underline{\mathbf{x}}$ est bien définie. De l'équation (1), on déduit

$$(\mathbb{D} - \mathbb{E})\mathbf{x}_{k+1/2} = \mathbb{F}\mathbf{x}_k + \mathbb{A}\underline{\mathbf{x}} = \mathbb{F}\mathbf{x}_k + (\mathbb{D} - \mathbb{E} - \mathbb{F})\underline{\mathbf{x}}$$

et donc

$$(\mathbb{D} - \mathbb{E})(\mathbf{x}_{k+1/2} - \underline{\mathbf{x}}) = \mathbb{F}(\mathbf{x}_k - \underline{\mathbf{x}}) \quad (\text{R2.1})$$

De la même manière à partir de l'équation (2), on déduit

$$(\mathbb{D} - \mathbb{F})(\mathbf{x}_{k+1} - \underline{\mathbf{x}}) = \mathbb{E}(\mathbf{x}_{k+1/2} - \underline{\mathbf{x}}) \quad (\text{R2.2})$$

En utilisant (R2.1), l'équation (R2.3) devient

$$(\mathbb{D} - \mathbb{F})(\mathbf{x}_{k+1} - \underline{\mathbf{x}}) = \mathbb{E}(\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1}\mathbb{F}(\mathbf{x}_k - \underline{\mathbf{x}})$$

c'est à dire

$$\mathbf{x}_{k+1} - \underline{\mathbf{x}} = \mathbb{B}(\mathbf{x}_k - \underline{\mathbf{x}}).$$

c. L'expression à démontrer est bien définie car $\mathbb{D}$ et $\mathbb{D} - \mathbb{E}$ inversibles. De plus on a

$$\mathbb{I} = (\mathbb{D} - \mathbb{E})(\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1}$$

En multipliant à gauche cette équation par $\mathbb{D}^{-1}$ on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{D}^{-1} &= \mathbb{D}^{-1}(\mathbb{D} - \mathbb{E})(\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1} \\ &= (\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1} - \mathbb{D}^{-1}\mathbb{E}(\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1}.\end{aligned}$$

Soit $(\lambda, \mathbf{p})$ un élément propre de la matrice $\mathbb{B}$.

Q. 3

a. En utilisant (4), montrer que l'on a

$$\left((\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1} - \mathbb{D}^{-1}\right) \mathbb{F}\mathbf{p} = \lambda \mathbb{D}^{-1}(\mathbb{D} - \mathbb{F})\mathbf{p} \quad (5)$$

b. En déduire que

$$\lambda \mathbb{A}\mathbf{p} + (\lambda - 1)\mathbb{E}\mathbb{D}^{-1}\mathbb{F}\mathbf{p} = 0. \quad (6)$$

c. En déduire que

$$\lambda = \frac{\langle \mathbb{F}\mathbf{p}, \mathbb{D}^{-1}\mathbb{F}\mathbf{p} \rangle}{\langle \mathbf{p}, \mathbb{A}\mathbf{p} \rangle + \langle \mathbb{F}\mathbf{p}, \mathbb{D}^{-1}\mathbb{F}\mathbf{p} \rangle}$$

et $\lambda \in [0, 1[$.

d. En déduire la convergence de la suite $(\mathbf{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ vers $\underline{\mathbf{x}}$.

R. 3

a. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{B}\mathbf{p} = \lambda\mathbf{p} &\Leftrightarrow (\mathbb{D} - \mathbb{F})^{-1}\mathbb{E}(\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1}\mathbb{F}\mathbf{p} = \lambda\mathbf{p} \\ &\Leftrightarrow \mathbb{E}(\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1}\mathbb{F}\mathbf{p} = \lambda(\mathbb{D} - \mathbb{F})\mathbf{p} \\ &\Leftrightarrow \mathbb{D}^{-1}\mathbb{E}(\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1}\mathbb{F}\mathbf{p} = \lambda\mathbb{D}^{-1}(\mathbb{D} - \mathbb{F})\mathbf{p}\end{aligned}$$

De (4), on a

$$\mathbb{D}^{-1}\mathbb{E}(\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1} = (\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1} - \mathbb{D}^{-1}$$

et donc

$$\mathbb{B}\mathbf{p} = \lambda\mathbf{p} \Leftrightarrow \left((\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1} - \mathbb{D}^{-1}\right) \mathbb{F}\mathbf{p} = \lambda\mathbb{D}^{-1}(\mathbb{D} - \mathbb{F})\mathbf{p}$$

b. On a alors

$$\begin{aligned}\mathbb{B}\mathbf{p} = \lambda\mathbf{p} &\Leftrightarrow \left((\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1} - \mathbb{D}^{-1}\right) \mathbb{F}\mathbf{p} = \lambda\mathbb{D}^{-1}(\mathbb{D} - \mathbb{F})\mathbf{p} \\ &\Leftrightarrow (\mathbb{D} - \mathbb{E}) \left((\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1} - \mathbb{D}^{-1}\right) \mathbb{F}\mathbf{p} = \lambda(\mathbb{D} - \mathbb{E})\mathbb{D}^{-1}(\mathbb{D} - \mathbb{F})\mathbf{p} \\ &\Leftrightarrow (\mathbb{I} - \mathbb{I} + \mathbb{E}\mathbb{D}^{-1}) \mathbb{F}\mathbf{p} = \lambda(\mathbb{I} - \mathbb{E}\mathbb{D}^{-1})(\mathbb{D} - \mathbb{F})\mathbf{p} \\ &\Leftrightarrow \mathbb{E}\mathbb{D}^{-1}\mathbb{F}\mathbf{p} = \lambda(\mathbb{D} - \mathbb{E} - \mathbb{F} + \mathbb{E}\mathbb{D}^{-1}\mathbb{F})\mathbf{p} \\ &\Leftrightarrow \mathbb{E}\mathbb{D}^{-1}\mathbb{F}\mathbf{p} = \lambda(\mathbb{A} + \mathbb{E}\mathbb{D}^{-1}\mathbb{F})\mathbf{p}\end{aligned}$$

On en déduit alors

$$\lambda \mathbb{A}\mathbf{p} + (\lambda - 1)\mathbb{E}\mathbb{D}^{-1}\mathbb{F}\mathbf{p} = 0.$$

c. On déduit de l'équation (6)

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \mathbf{p}, \lambda \mathbb{A} \mathbf{p} + (\lambda - 1) \mathbb{E} \mathbb{D}^{-1} \mathbb{F} \mathbf{p} \rangle \\ &= \lambda \langle \mathbf{p}, \mathbb{A} \mathbf{p} \rangle + (\lambda - 1) \langle \mathbf{p}, \mathbb{E} \mathbb{D}^{-1} \mathbb{F} \mathbf{p} \rangle \end{aligned}$$

et donc

$$\lambda (\langle \mathbf{p}, \mathbb{A} \mathbf{p} \rangle + \langle \mathbf{p}, \mathbb{E} \mathbb{D}^{-1} \mathbb{F} \mathbf{p} \rangle) = \langle \mathbf{p}, \mathbb{E} \mathbb{D}^{-1} \mathbb{F} \mathbf{p} \rangle \quad (\text{R2.3})$$

Comme la matrice $\mathbb{A}$ est définie positive, on a $\langle \mathbb{A} \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle > 0$ car $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ (vecteur propre) et donc

$$\langle \mathbf{p}, \mathbb{A} \mathbf{p} \rangle = \overline{\langle \mathbb{A} \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle} = \langle \mathbb{A} \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle > 0.$$

De plus on a

$$\langle \mathbf{p}, \mathbb{E} \mathbb{D}^{-1} \mathbb{F} \mathbf{p} \rangle = \langle \mathbb{E}^* \mathbf{p}, \mathbb{D}^{-1} \mathbb{F} \mathbf{p} \rangle.$$

La matrice $\mathbb{A}$ étant hermitienne, on a $\mathbb{E}^* = \mathbb{F}$ et donc

$$\langle \mathbf{p}, \mathbb{E} \mathbb{D}^{-1} \mathbb{F} \mathbf{p} \rangle = \langle \mathbb{F} \mathbf{p}, \mathbb{D}^{-1} \mathbb{F} \mathbf{p} \rangle.$$

La matrice $\mathbb{A}$ étant définie positive, la matrice diagonale $\mathbb{D}$ est définie positive car $d_{i,i} > 0, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, et donc $\mathbb{D}^{-1}$ aussi. Comme $\mathbb{F} \mathbf{p}$ n'est pas nécessairement non nul, on a

$$\langle \mathbb{D}^{-1} \mathbb{F} \mathbf{p}, \mathbb{F} \mathbf{p} \rangle \in \mathbb{R}^+.$$

On en déduit

$$\langle \mathbb{F} \mathbf{p}, \mathbb{D}^{-1} \mathbb{F} \mathbf{p} \rangle = \overline{\langle \mathbb{D}^{-1} \mathbb{F} \mathbf{p}, \mathbb{F} \mathbf{p} \rangle} = \langle \mathbb{D}^{-1} \mathbb{F} \mathbf{p}, \mathbb{F} \mathbf{p} \rangle \geq 0.$$

De l'équation (R2.3), on obtient

$$\lambda (\langle \mathbf{p}, \mathbb{A} \mathbf{p} \rangle + \langle \mathbb{F} \mathbf{p}, \mathbb{D}^{-1} \mathbb{F} \mathbf{p} \rangle) = \langle \mathbb{F} \mathbf{p}, \mathbb{D}^{-1} \mathbb{F} \mathbf{p} \rangle.$$

Or

$$\langle \mathbf{p}, \mathbb{A} \mathbf{p} \rangle + \langle \mathbb{F} \mathbf{p}, \mathbb{D}^{-1} \mathbb{F} \mathbf{p} \rangle > 0 \quad \text{donc} \quad \neq 0$$

ce qui donne

$$\lambda = \frac{\langle \mathbb{F} \mathbf{p}, \mathbb{D}^{-1} \mathbb{F} \mathbf{p} \rangle}{\langle \mathbf{p}, \mathbb{A} \mathbf{p} \rangle + \langle \mathbb{F} \mathbf{p}, \mathbb{D}^{-1} \mathbb{F} \mathbf{p} \rangle}.$$

On a alors $\lambda \in [0, 1[$.

d. En posant $\mathbf{e}_k = \mathbf{x}_k - \underline{\mathbf{x}}$ on a alors

$$\mathbf{e}_k = \mathbb{B}^k \mathbf{e}_0, \quad \forall k \geq 0.$$

Or la suite $\mathbf{x}_k$ converge vers $\underline{\mathbf{x}}$ si et seulement si la suite $\mathbf{e}_k$ converge vers $\mathbf{0}$. Pour cela, d'après le Théorème ??, page ??, il est nécessaire et suffisant d'avoir $\rho(\mathbb{B}) < 1$. Comme toutes les valeurs propres de $\mathbb{B}$ sont dans $[0, 1[$, on a $\rho(\mathbb{B}) < 1$ et donc la convergence est assurée.

EXERCICE 3 (7.25 points)

Q. 1

Soient I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

a. Soit $f \in \mathcal{C}^0(I; \mathbb{R})$, avec f dérivable sur I . On suppose qu'il existe $(x_i)_{i=0}^n$ dans I , avec $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, tels que

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad f(x_i) = 0.$$

Montrer qu'il existe $(\xi_i)_{i=1}^n$ dans I , avec $x_0 < \xi_1 < x_1 < \xi_2 < x_2 < \dots < \xi_n < x_n$, tels que

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad f^{(1)}(\xi_i) = 0.$$

b. Démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la proposition suivante

$(\mathcal{P}_n)$

Soit $f \in \mathcal{C}^{n-1}(I; \mathbb{R})$, $f^{(n-1)}$ dérivable sur I . Si f admet au moins $(n+1)$ zéros distincts dans I , notés $x_0 < \dots < x_n$, alors $f^{(n)}$ admet au moins un zéro dans $]x_0, x_n[$.

R. 1

a. On rappelle le théorème de Rolle:

Théorème : Rolle

Soient a, b deux réels, $a < b$, et, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que

- f est continue sur $[a, b]$,
- f est dérivable sur $]a, b[$,
- $f(a) = f(b)$.

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Sur l'intervalle $[x_{k-1}, x_k]$, $x_{k-1} < x_k$, on a $f(x_{k-1}) = f(x_k) (= 0)$ et le théorème de Rolle s'applique:

$$\exists \xi_k \in]x_{k-1}, x_k[, \quad f^{(1)}(\xi_k) = 0.$$

La fonction $f^{(1)}$ admet donc au moins n zéros distincts, les $(\xi_k)_{k=1}^n$, avec

$$x_0 < \xi_1 < x_1 < \xi_2 < \dots < x_{n-1} < \xi_n < x_n.$$

b. • **Initialisation.** Montrons que $(\mathcal{P}_1)$ est vérifiée.

Soit $f \in \mathcal{C}^0(I; \mathbb{R})$ et f dérivable sur I . Si f admet au moins 2 zéros distincts dans I , notés x_0 et x_1 , avec $x_0 < x_1$, alors on a $f(x_0) = f(x_1) (= 0)$ et le théorème de Rolle s'applique:

$$\exists \xi \in]x_0, x_1[, \quad f^{(1)}(\xi) = 0.$$

• **Hérédité.** Soit $n \geq 2$. On suppose que $(\mathcal{P}_{n-1})$ est vraie. Montrons que $(\mathcal{P}_n)$ est vérifiée.

Soit $f \in \mathcal{C}^{n-1}(I; \mathbb{R})$, $f^{(n-1)}$ dérivable sur I . On suppose que f admet au moins $(n+1)$ zéros distincts dans I , notés $(x_i)_{i=0}^n$ avec $x_0 < \dots < x_n$. On a donc

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad f(x_i) = 0.$$

Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Comme on vérifie les hypothèses de **Q. ??**, on en déduit

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \exists \xi_k \in]x_{k-1}, x_k[, \quad \text{tel que } f^{(1)}(\xi_k) = 0.$$

La fonction $f^{(1)}$ admet donc au moins n zéros distincts, les $(\xi_k)_{k=1}^n$, avec $x_0 < \xi_1 < \dots < \xi_n < x_n$. En posant $g = f^{(1)}$, on a, par hypothèse sur f , $g \in \mathcal{C}^{n-2}(I; \mathbb{R})$ et $g^{(n-2)}$ dérivable sur I . La fonction g admettant n zéros distincts dans I , les $(\xi_k)_{k=1}^n$, avec $\xi_1 < \dots < \xi_n$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence $(\mathcal{P}_{n-1})$ à g pour obtenir

$$\exists \xi \in]\xi_1, \xi_n[, \quad g^{(n-1)}(\xi) = 0.$$

On abouti alors à $f^{(n)}(\xi) = 0$ avec $\xi \in]\xi_1, \xi_n[\subset]x_0, x_n[$.

Ce qui prouve $(\mathcal{P}_n)$.

• **Conclusion.** On a démontré par récurrence que $(\mathcal{P}_n)$ est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Q. 2

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(n+1)$ couples de $\mathbb{R}^2$, $(x_i, y_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$, tels que les x_i sont distincts deux à deux.

a. Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Montrer qu'il existe un unique polynôme L_i de degré n vérifiant

$$L_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad \forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket. \quad (1)$$

b. Montrer que les $(L_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$ (espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n).

c. Le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux $(n+1)$ couples $(x_i, y_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est alors donné par

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(x) \quad \text{avec} \quad L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}. \quad (2)$$

Montrer que le polynôme P_n est l'unique polynôme de degré au plus n vérifiant $P_n(x_i) = y_i, \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

R. 2

a. De (1), on déduit que les n points distincts x_j pour $j \in \llbracket 0, n \rrbracket \setminus \{i\}$ sont les n zéros du polynôme L_i de degré n : il s'écrit donc sous la forme

$$L_i(x) = C \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x - x_j) \quad \text{avec} \quad C \in \mathbb{R}$$

Pour déterminer la constante C , on utilise (1) avec $j = i$

$$L_i(x_i) = 1 = C \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)$$

Les points x_i sont distincts deux à deux, on a $\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j) \neq 0$ et donc

$$C = \frac{1}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)}$$

d'où

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket. \quad (\text{R3.4})$$

Il reste à démontrer l'unicité. On suppose qu'il existe L_i et U_i deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant (1). Alors $Q_i = L_i - U_i$ est polynôme de degré n (au plus) admettant $n+1$ zéros distincts, c'est donc le polynôme nul et on a nécessairement $L_i = U_i$.

b. On sait que $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$. Pour que les $\{L_i\}_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$ il suffit de démontrer qu'ils sont linéairement indépendants.

Soit $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ $n+1$ scalaires. Montrons pour cela que

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i L_i = 0 \implies \lambda_i = 0, \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$$

Noter que la première égalité est dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ et donc le 0 est pris au sens polynôme nul.

On a

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i L_i = 0 \iff \sum_{i=1}^n \lambda_i L_i(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. En choisissant $x = x_k$, on a par (1) $\sum_{i=1}^n \lambda_i L_i(x_k) = \lambda_k$ et donc

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i L_i = 0 \implies \sum_{i=1}^n \lambda_i L_i(x_k) = 0, \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket \iff \lambda_k = 0, \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket.$$

Les $\{L_i\}_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ sont donc linéairement indépendants.

c. Par construction $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ et on a, $\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket^a$,

$$\begin{aligned} P_n(x_j) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^n y_i L_i(x_j) \\ &= \sum_{i=0}^n y_i \delta_{i,j} \text{ par (1)} \\ &= y_j. \end{aligned}$$

Pour démontrer l'unicité, on propose ici deux méthodes

- On note P_a et P_b deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant (1). Le polynôme $Q = P_a - P_b$ appartient aussi à $\mathbb{R}_n[X]$ et il vérifie, $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$Q(x_i) = P_a(x_i) - P_b(x_i) = 0.$$

Les $n+1$ points x_i étant distincts, ce sont donc $n+1$ racines distinctes du polynôme Q . Or tout polynôme de degré n admet au plus n racines distinctes^b. On en déduit que le seul polynôme de degré au plus n admettant $n+1$ racines distinctes est le polynôme nulle et donc $P_a = P_b$.

- c'est l'unique polynôme de degré au plus n vérifiant (2) car la décomposition dans la base $\{L_i\}_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est unique.

^aA noter le choix de l'indice j . Que doit-on faire dans ce qui suit si l'on choisit i comme indice?

^bLe théorème de d'Alembert-Gauss affirme que tout polynôme à coefficients complexes de degré n admet n racines complexes qui ne sont pas nécessairement distinctes

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a; b]; \mathbb{R})$ et $(n+1)$ couples de $\mathbb{R}^2$, $(x_i, y_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$, tels que les $x_i \in [a; b]$ sont distincts deux à deux et $y_i = f(x_i)$.

On note par P_n le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux couples $(x_i, y_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ et π_n le polynôme défini par

$$\pi_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=0}^n (x - x_i).$$

Q. 3

Soit $x \in [a; b]$ tel que, pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $x \neq x_i$. On note

$$x_{\min} = \min(x, x_0, \dots, x_n), \quad x_{\max} = \max(x, x_0, \dots, x_n),$$

et

$$F(t) = f(t) - P_n(t) - \frac{f(x) - P_n(x)}{\pi_n(x)} \pi_n(t).$$

a. Démontrer que F est définie sur $[a; b]$ et admet $(n+2)$ racines distinctes.

b. Montrer qu'il existe $\xi_x \in]x_{\min}; x_{\max}[$ tel que $F^{(n+1)}(\xi_x) = 0$.

c. En déduire que

$$f(x) - P_n(x) = \frac{\pi_n(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x). \quad (3)$$

R. 3

a. Comme pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $x \neq x_i$, on a $\pi_n(x) \neq 0$. De plus les fonctions f , P_n et π_n étant définies sur $[a; b]$, on en déduit que F est définie sur $[a; b]$.

Pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a $\pi_n(x_i) = 0$ et $f(x_i) - P_n(x_i) = 0$, ce qui donne $F(x_i) = 0$. Comme $F(x) = 0$, on en déduit que F admet $(n+2)$ racines distinctes: $\{x, x_0, \dots, x_n\}$.

b. Les fonctions P_n et π_n sont polynomiales: elles sont donc dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$. Comme $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a; b]; \mathbb{R})$, on en déduit $F \in \mathcal{C}^{n+1}([a; b]; \mathbb{R})$. Or F admettant $(n+2)$ racines distinctes dans $]x_{\min}; x_{\max}[$, on peut alors utiliser (??) pour obtenir

$$\exists \xi_x \in]x_{\min}; x_{\max}[; \quad F^{(n+1)}(\xi_x) = 0.$$

c. On a

$$0 = F^{(n+1)}(\xi_x) = f^{(n+1)}(\xi_x) - P_n^{(n+1)}(\xi_x) - \frac{f(x) - P_n(x)}{\pi_n(x)} \pi_n^{(n+1)}(\xi_x).$$

Comme $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $P_n^{(n+1)} = 0$. De plus $\pi_n \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$, et comme $\pi_n(x) = x^{n+1} + Q(x)$ avec $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ (i.e. son monôme de puissance $n+1$ à pour coefficient 1) on obtient $\pi_n^{(n+1)}(x) = (n+1)!$. On en déduit

$$f^{(n+1)}(\xi_x) = \frac{f(x) - P_n(x)}{\pi_n(x)} (n+1)!$$

ce qui donne (3).

Q. 4

Montrer que, $\forall x \in [a; b]$, il existe ξ_x appartenant au plus petit intervalle ouvert contenant $x, x_0, \dots, x_n$ vérifiant (3)

R. 4

- Si, $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $x \neq x_i$ alors (3) a été démontré dans la question précédente.
- Si, $\exists i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $x = x_i$, alors l'équation (3) est immédiate (avec ξ_x quelconque) car

$$f(x_i) - P_n(x_i) = 0 \quad \text{et} \quad \pi_n(x_i) = 0.$$

Q. 5 (Algo)

Ecrire une fonction **Lagrange** permettant de retourner $P_n(x)$.

R. 5

But : Calculer le polynôme $\mathcal{P}_n(t)$ défini par (2)

Données : $\mathbf{X}$: vecteur/tableau de $\mathbb{R}^{n+1}$, $X(i) = x_{i-1} \quad \forall i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ et $X(i) \neq X(j)$ pour $i \neq j$,

$\mathbf{Y}$: vecteur/tableau de $\mathbb{R}^{n+1}$, $Y(i) = y_{i-1} \quad \forall i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$,

t : un réel.

Résultat : y : le réel $y = \mathcal{P}_n(t)$.

Algorithme 5 $\mathcal{R}_0$

1: Calcul de $y = \mathcal{P}_n(t) = \sum_{i=1}^{n+1} Y(i)L_{i-1}(t)$

Algorithme 5 $\mathcal{R}_1$

1: $y \leftarrow 0$
 2: **Pour** $i \leftarrow 1$ à $n+1$ **faire**
 3: $y \leftarrow y + Y(i) * L_{i-1}(t)$
 4: **Fin Pour**

Algorithme 5 $\mathcal{R}_1$

1: $y \leftarrow 0$
 2: **Pour** $i \leftarrow 1$ à $n+1$ **faire**
 3: $y \leftarrow y + Y(i) * L_{i-1}(t)$
 4: **Fin Pour**

Algorithme 5 $\mathcal{R}_2$

1: $y \leftarrow 0$
 2: **Pour** $i \leftarrow 1$ à $n+1$ **faire**
 3: $L \leftarrow \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} \frac{t - X(j)}{X(i) - X(j)}$
 4: $y \leftarrow y + Y(i) * L$
 5: **Fin Pour**

Algorithme 5 $\mathcal{R}_2$

1: $y \leftarrow 0$
 2: **Pour** $i \leftarrow 1$ à $n+1$ **faire**
 3: $L \leftarrow \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} \frac{t - X(j)}{X(i) - X(j)}$
 4: $y \leftarrow y + Y(i) * L$
 5: **Fin Pour**

Algorithme 5 $\mathcal{R}_3$

1: $y \leftarrow 0$
 2: **Pour** $i \leftarrow 1$ à $n+1$ **faire**
 3: $L \leftarrow 1$
 4: **Pour** $j \leftarrow 1$ à $n+1$, $(j \sim i)$ **faire**
 5: $L \leftarrow L * (t - X(j)) / (X(i) - X(j))$
 6: **Fin Pour**
 7: $y \leftarrow y + Y(i) * L$
 8: **Fin Pour**

On obtient alors l'algorithme final

Algorithme 5 Fonction **LAGRANGE** permettant de calculer le polynôme d'interpolation de Lagrange $\mathcal{P}_n(x)$ défini par (??)

Données : $\mathbf{X}$: vecteur/tableau de $\mathbb{R}^{n+1}$, $\mathbf{X}(i) = x_{i-1} \ \forall i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ et
 $\mathbf{X}(i) \neq \mathbf{X}(j)$ pour $i \neq j$,
 $\mathbf{Y}$: vecteur/tableau de $\mathbb{R}^{n+1}$, $\mathbf{Y}(i) = y_{i-1} \ \forall i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$,
 t : un réel.

Résultat : y : le réel $y = \mathcal{P}_n(t)$.

```
1: Fonction  $y \leftarrow \mathbf{LAGRANGE}(t, \mathbf{X}, \mathbf{Y})$ 
2:    $y \leftarrow 0$ 
3:   Pour  $i \leftarrow 1$  à  $n+1$  faire
4:      $L \leftarrow 1$ 
5:     Pour  $j \leftarrow 1$  à  $n+1$ , ( $j \sim = i$ ) faire
6:        $L \leftarrow L * (t - \mathbf{X}(j)) / (\mathbf{X}(i) - \mathbf{X}(j))$ 
7:     Fin Pour
8:      $y \leftarrow y + \mathbf{Y}(i) * L$ 
9:   Fin Pour
10:  return  $y$ 
11: Fin Fonction
```
