

1 Analyse

1.1 En vrac

Théorème 1.1 (Théorème de Rolle). Soient a, b deux réels, $a < b$, et, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que

- f est continue sur $[a, b]$,
- f est dérivable sur $]a, b[$,
- $f(a) = f(b)$.

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème 1.2 (Théorème de Bolzano ou des valeurs intermédiaires). Soit $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Si $f(a)$ et $f(b)$ ne sont pas de même signe (i.e. $f(a)f(b) < 0$) alors il existe au moins $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.

Théorème 1.3 (Théorème des accroissements finis). Soient a et b deux réels, $a < b$ et f une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$, dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$. Alors il existe $\xi \in]a, b[$ tel que

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Proposition 1.4 (Formule de Taylor-Lagrange d'ordre n). Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{C}^n([a, b])$ dont la dérivée n -ième est dérivable sur $]a, b[$. Alors

- pour tout x, y dans $[a, b]$, $x \neq y$, il existe $\xi \in]\min(x, y), \max(x, y)[$ tel que

$$f(x) = f(y) + \sum_{k=1}^n \frac{(x-y)^k}{k!} f^{(k)}(y) + \frac{(x-y)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \quad (1)$$

- $\forall t \in [a, b]$, $\forall h \in \mathbb{R}^*$ vérifiant $(t+h) \in [a, b]$, il existe $\xi \in]\min(t, t+h), \max(t, t+h)[$ tel quel

$$f(t+h) = f(t) + \sum_{k=1}^n \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(t) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \quad (2)$$

Définition 1.5. Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \mathbb{R}$. On dit que f est **dominée** par g au voisinage de a , si, au voisinage de a , il existe une fonction θ bornée telle que $f = \theta g$. Dans ce cas, on dit aussi que f **se comporte comme un grand O de g** au voisinage de a et on note alors $f \stackrel{a}{=} \mathcal{O}(g)$.

Définition 1.6. Soit f une fonction définie au voisinage de 0. On dit que $f(h)$ **se comporte comme un grand O de h^p** (au voisinage de 0) si f est dominée par $h \mapsto h^p$ au voisinage de 0 et on note alors $f(h) = \mathcal{O}(h^p)$.

On peut noter entre autres

- $\forall \alpha \in \mathbb{R}^*$,

$$g(h) = \mathcal{O}(h^q) \Rightarrow \alpha g(h) = \mathcal{O}(h^q),$$

*. auteur : F. Cuvelier. Compilé le 19 octobre 2026 à 11 h 53.

c'est à dire

$$\alpha \mathcal{O}(h^q) = \mathcal{O}(h^q).$$

- $\forall p \in \mathbb{Z}, p + q \geq 0,$

$$g(h) = \mathcal{O}(h^q) \Rightarrow h^p g(h) = \mathcal{O}(h^{p+q}),$$

c'est à dire

$$h^p \mathcal{O}(h^q) = \mathcal{O}(h^{p+q}).$$

- $\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, p \neq q, \forall (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*,$

$$g_1(h) = \mathcal{O}(h^p), g_2(h) = \mathcal{O}(h^q) \Rightarrow \alpha_1 g_1(h) + \alpha_2 g_2(h) = \mathcal{O}(h^{\min(p,q)}),$$

c'est à dire

$$\alpha_1 \mathcal{O}(h^p) + \alpha_2 \mathcal{O}(h^q) = \mathcal{O}(h^{\min(p,q)}).$$

Proposition 1.7 (Formule de Taylor-Landau d'ordre n). Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b])$, alors $\forall t \in [a, b]$, $\forall h \in \mathbb{R}^*$ vérifiant $(t + h) \in [a, b]$, il existe $\xi \in]\min(t, t + h), \max(t, t + h)[$ tel quel

$$f(t + h) = f(t) + \sum_{k=1}^n \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(t) + \mathcal{O}(h^{n+1}) \quad (3)$$

Corollaire 1.8 (Théorème de la bijection). Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a, b]$ et à valeurs réelles, alors elle constitue une bijection entre $[a, b]$ et l'intervalle fermé dont les bornes sont $f(a)$ et $f(b)$.

Proposition 1.9. Soit f est une fonction bijective continue d'un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ sur un intervalle ouvert $J \subset \mathbb{R}$. Si f est dérivable en $\alpha \in I$ et que $f'(\alpha) \neq 0$ alors sa réciproque f^{-1} est dérivable en $\beta = f(\alpha) \in J$ et

$$(f^{-1})'(\beta) = \frac{1}{f'(\alpha)} \quad \text{ou encore} \quad (f^{-1})'(\beta) = \frac{1}{f'(f^{-1}(\beta))}$$

1.2 Espace métrique[†]

Définition 1.10 (Distance sur un ensemble). On appelle **distance** sur un ensemble E , une application d de E^2 dans $\mathbb{R}_+$ telle que pour tout $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in E^3$ on a

- symétrie : $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$,
- séparation : $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$,
- inégalité triangulaire : $d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z})$

Voici quelques exemples de distances :

- $d(x, y) = |x - y|$ dans $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$
- $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ dans $\mathbb{R}^n$, où $\|\cdot\|$ est l'une quelconque des normes habituelles.

Définition 1.11 (Espace métrique). Un ensemble E muni d'une distance d est appelé **espace métrique** et on le note (E, d) .

Soient (E, d) un espace métrique, $\mathbf{a} \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+$. On appelle

- **boule ouverte** de centre $\mathbf{a}$ et de rayon r l'ensemble

$$\mathcal{B}(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x} \in E; d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < r\},$$

- **boule fermée** de centre $\mathbf{a}$ et de rayon r l'ensemble

$$\overline{\mathcal{B}(\mathbf{a}, r)} = \{\mathbf{x} \in E; d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) \leq r\},$$

[†]. En grande partie extrait du site bibmat

- **sphere** de centre $\mathbf{a}$ et de rayon r l'ensemble

$$\mathcal{S}(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x} \in E; d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = r\},$$

Une partie $A \subset E$ est dite **bornée** si

$$\exists \mathbf{x} \in E, \exists R \in \mathbb{R}_+^*, A \subset \mathcal{B}(\mathbf{x}, R).$$

1.2.1 Suites

Définition 1.12 (Suite convergente). Soient (E, d) un **espace métrique** et $(\mathbf{u}^{[k]})_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E . On dit que la suite $(\mathbf{u}^{[k]})_{k \in \mathbb{N}}$ converge si

$$\exists \alpha \in E, \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall k > N, d(\mathbf{u}^{[k]}, \alpha) < \epsilon. \quad (4)$$

Dans ce cas on dit que la suite $(\mathbf{u}^{[k]})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $\alpha \in E$.

Une suite qui ne converge vers aucun $\alpha \in E$ est dite **divergente** et vérifie

$$\forall \alpha \in E, \exists \epsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists k > N, d(\mathbf{u}^{[k]}, \alpha) \geq \epsilon.$$

Si la suite $(\mathbf{u}^{[k]})$ de E converge vers α (nécessairement unique dans E) alors on dit que α est la **limite** de $(\mathbf{u}^{[k]})$ et on note

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{u}^{[k]} = \alpha \quad \text{ou} \quad \mathbf{u}^{[k]} \underset{k \rightarrow +\infty}{=} \alpha.$$

1.2.2 Ouverts et fermés

Soit (E, d) un espace métrique.

Soient $\mathbf{x} \in E$ et $V \subset E$. On dit que V est un **voisinage** de $\mathbf{x}$ s'il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\mathcal{B}(\mathbf{x}, r) \subset V$.

On dit que $U \subset E$ est un **ouvert** de E si elle est voisinage de tous ses points :

$$\forall \mathbf{x} \in U, \exists r \in \mathbb{R}_+^*, \mathcal{B}(\mathbf{x}, r) \subset U \quad (5)$$

Proposition 1.13.

- E et $\emptyset$ sont des ouverts,
- une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert,
- une intersection finie d'ouverts est un ouvert.

On dit que $U \subset E$ est un **fermé** de E si son complémentaire est un ouvert de E .

Proposition 1.14.

- E et $\emptyset$ sont des fermés,
- une réunion finie de fermés est un fermé,
- une intersection quelconque de fermés est un fermé.

Soit $A \subset E$.

- On dit que $\mathbf{x} \in E$ est un **point intérieur** de A si

$$\exists r \in \mathbb{R}_+^*, \mathcal{B}(\mathbf{x}, r) \subset A.$$

On appelle **intérieur** de A et on note $\overset{\circ}{A}$ l'ensemble des points intérieurs de A .

L'ensemble $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert : c'est le plus grand ouvert contenu dans A .

- On dit que $\mathbf{x} \in E$ est un **point adhérent** à A si

$$\forall r \in \mathbb{R}_+^*, \mathcal{B}(\mathbf{x}, r) \cap A \neq \emptyset.$$

On appelle **adhérence** de A et on note $\overline{A}$ l'ensemble des points adhérents de A . L'ensemble $\overline{A}$ est un fermé : c'est le plus petit fermé contenant A .

Théorème 1.15. Soient $A \subset E$ et $\mathbf{x} \in E$.

- $\mathbf{x} \in \overline{A}$ si et seulement si il existe une suite $(\mathbf{u}^{[k]})$ de A qui converge vers $\mathbf{x}$.
- A est fermé si et seulement si, pour toute suite $(\mathbf{u}^{[k]})$ de A qui converge vers $\alpha \in E$, alors $\alpha \in A$.

Définition 1.16. Une partie $K \subset E$ est dite **compacte** si, de toute suite $(\mathbf{u}^{[k]})$ de K , on peut extraire une sous-suite convergente vers un élément de K .

- toute réunion finie de compacts est compacte,
- toute intersection quelconque de compacts est compacte,
- toute partie compacte de E est fermée et bornée.

1.2.3 Limites et continuité

Soient (E, d) et (F, d) deux espaces métriques, et $f : E \longrightarrow F$ une fonction. Soit $\alpha \in E$. on dit que f **admet une limite** en α si

$$\exists \beta \in F, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \mathbf{x} \in E, \left(d(\mathbf{x}, \alpha) < \delta \Rightarrow d(f(\mathbf{x}), \beta) < \varepsilon \right) \quad (6)$$

Cette limite, si elle existe, est nécessairement unique, égale à β , et on note alors

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \alpha} f(\mathbf{x}) = \beta \quad \text{ou} \quad f(\mathbf{x}) \xrightarrow{\mathbf{x} \rightarrow \alpha} \beta.$$

Proposition 1.17. f admet une limite β en α si et seulement si pour toute suite $\mathbf{u}^{[k]}$ de E qui converge vers α , alors la suite $f(\mathbf{u}^{[k]})$ de F converge vers β .

Définition 1.18. Soient (E, d) et (F, d) deux espaces métriques, et $f : E \longrightarrow F$ une fonction.

- f est **continue en $\alpha \in E$** si f admet une limite en α (nécessairement égale à $f(\alpha)$) ou encore

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \mathbf{x} \in E, \left(d(\mathbf{x}, \alpha) < \delta \Rightarrow d(f(\mathbf{x}), f(\alpha)) < \varepsilon \right). \quad (7)$$

- f est **continue sur $A \subset E$** si elle est continue en chaque point de A .

Théorème 1.19. Soient (E, d) et (F, d) deux espaces métriques, et $f : E \longrightarrow F$ une fonction.

f est continue en $\alpha \in E$ si et seulement si, pour toute suite $\mathbf{u}^{[k]}$ de E qui converge vers α , alors la suite $f(\mathbf{u}^{[k]})$ de F converge vers $f(\alpha)$.

Théorème 1.20. Soient (E, d) et (F, d) deux espaces métriques, et $f : E \longrightarrow F$ une fonction. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- f est continue sur E ,
- L'image réciproque d'un ouvert de F par f est un ouvert de E ,
- L'image réciproque d'un fermé de F par f est un fermé de E .

Définition 1.21. Soient (E, d) et (F, d) deux espaces métriques, et $f : E \longrightarrow F$ une fonction.

On dit que f est **uniformément continue** sur $A \subset E$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in A^2, \left(d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \delta \Rightarrow d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) < \varepsilon \right).$$

Définition 1.22. Soient (E, d) et (F, d) deux espaces métriques, et $f : E \longrightarrow F$ une fonction.

- On dit que f est **Lipschitzienne** de rapport $K \in \mathbb{R}_+$ ou **K -lipschitzienne** sur $A \subset E$ si

$$\forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in A^2, d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) \leq K d(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

- On dit que f est **contractante** sur $A \subset E$ si elle est **lipschitzienne** de rapport $K \in [0, 1[$ sur $A \subset E$.

- Toute application lipschitzienne est uniformément continue.
- Toute application uniformément continue est continue.

Les réciproques sont fausses.

Théorème 1.23. Soient (E, d) et (F, d) deux espaces métriques, K un compact de E , et $f : K \longrightarrow F$. Si f est continue sur K alors $f(K)$ est un compact de F .

Théorème 1.24 (Théorème de Heine). Toute fonction continue sur un compact est uniformément continue.

1.2.4 Suites de Cauchy

Définition 1.25 (Suite de Cauchy). Soit (E, d) un **espace métrique**. Une suite $(\mathbf{x}^{[k]})_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E est dite **de Cauchy** si

$$\forall \epsilon > 0, \exists M \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, p, q \geq M, d(\mathbf{x}^{[p]}, \mathbf{x}^{[q]}) < \epsilon.$$

ce qui correspond à

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \sup_{p, q \geq m} d(\mathbf{x}^{[p]}, \mathbf{x}^{[q]}) = 0.$$

Une autre manière de l'écrire est

$$\forall \epsilon > 0, \exists M \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall k \in \mathbb{N}, k \geq M, \forall l \in \mathbb{N}, d(\mathbf{x}^{[k+l]}, \mathbf{x}^{[k]}) < \epsilon.$$

ce qui correspond à

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \sup_{k \geq m, l \geq 0} d(\mathbf{x}^{[k+l]}, \mathbf{x}^{[k]}) = 0.$$

Définition 1.26 (Espace métrique complet). Un espace métrique est dit **complet** si toute suite de Cauchy converge.

Proposition 1.27. Si E est un espace vectoriel normé de norme $\|\cdot\|$ alors E est un espace métrique pour la distance d issue de sa norme et définie par $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$, $\forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E^2$.

Définition 1.28 (Espace de Banach). On appelle **espace de Banach** un espace vectoriel normé complet pour la distance issue de sa norme.

Par exemple, les espaces vectoriels normés $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $(\mathbb{C}, |\cdot|)$, $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|)$ sont des espaces de Banach. Plus généralement, un espace vectoriel normé de dimension finie est un espace de Banach.

1.2.5 Ordre de convergence

Définition 1.29 (Ordre de convergence). Soient (E, d) un **espace métrique** et $(\mathbf{u}^{[k]})_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E **convergeant vers** $\alpha \in E$ avec, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{u}^{[k]} \neq \alpha$. Soit $p \in [1, +\infty[$. On dit que cette suite **converge vers** α avec un **ordre p au moins** si

$$\exists C > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N}, \text{ tels que } \forall k \geq k_0, \quad d(\mathbf{u}^{[k+1]}, \alpha) \leq C d(\mathbf{u}^{[k]}, \alpha)^p. \quad (8)$$

où $C < 1$ si $p = 1$.

On dit que cette suite **converge vers** α avec un **ordre p (exactement)** si elle converge à l'ordre p au moins et si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{d(\mathbf{u}^{[k+1]}, \alpha)}{d(\mathbf{u}^{[k]}, \alpha)^{p+\varepsilon}} = +\infty. \quad (9)$$

Soient (E, d) un **espace métrique** et $(\mathbf{u}^{[k]})_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E **convergeant vers** $\alpha \in E$ avec, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{u}^{[k]} \neq \alpha$.

La suite **converge vers** α à l'ordre 1 (exactement) si

$$\exists \mu \in]0, 1[, \text{ tel que } \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{d(\mathbf{u}^{[k+1]}, \alpha)}{d(\mathbf{u}^{[k]}, \alpha)} = \mu. \quad (10)$$

Dans ce cas la convergence est dite **linéaire**.

- Si (10) est vérifiée pour $\mu = 0$, alors la convergence est dite **super-linéaire**.
- Si (10) n'est vérifiée pour aucun $\mu \in]0, 1[$, alors la convergence est dite **sous-linéaire**.

La suite **converge vers** α à l'ordre $p \in]1, +\infty[$ (exactement) si

$$\exists \mu > 0, \text{ tel que } \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{d(\mathbf{u}^{[k+1]}, \alpha)}{d(\mathbf{u}^{[k]}, \alpha)^p} = \mu. \quad (11)$$

et dans ce cas la convergence est **super-linéaire**.

La convergence d'ordre 2 (resp. 3) est dite **quadratique** (resp. **cubique**).