

Démonstration : Formule de Multiplication de Matrices par Blocs

Algèbre Linéaire

Le 5 octobre 2026 à 17 h 34

Énoncé de la propriété

Soient M, S, N trois entiers strictement positifs, $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{M,S}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{S,N}(\mathbb{K})$. Le produit $\mathbb{P} = \mathbb{A}\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{M,N}(\mathbb{K})$ peut s'écrire sous forme bloc si les matrices $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$, écrites sous forme blocs, sont compatibles par blocs pour la multiplication par blocs :
le nombre de blocs colonnes de $\mathbb{A}$ doit être égal au nombre de blocs lignes de $\mathbb{B}$ avec correspondance exacte des dimensions.

Plus précisément, soient p, r, q trois entiers strictement positifs, $(m_i)_{i=1}^p, (s_k)_{k=1}^r, (n_j)_{j=1}^q$ des éléments de $\mathbb{N}^*$ avec

$$M = \sum_{i=1}^p m_i, \quad S = \sum_{k=1}^r s_k, \quad N = \sum_{j=1}^q n_j.$$

On définit alors les décompositions par blocs, compatible pour la multiplication par blocs de $\mathbb{A}$ par $\mathbb{B}$, suivantes

$$\mathbb{A} = \begin{matrix} & \begin{matrix} s_1 & \dots & s_r \end{matrix} \\ \begin{matrix} m_1 \\ \vdots \\ m_p \end{matrix} & \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbb{A}^{(1,1)} & \dots & \mathbb{A}^{(1,r)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \mathbb{A}^{(p,1)} & \dots & \mathbb{A}^{(p,r)} \end{array} \right) \end{matrix} \quad \text{et} \quad \mathbb{B} = \begin{matrix} \begin{matrix} n_1 & \dots & n_q \end{matrix} \\ \begin{matrix} s_1 \\ \vdots \\ s_r \end{matrix} & \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbb{B}^{(1,1)} & \dots & \mathbb{B}^{(1,q)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \mathbb{B}^{(r,1)} & \dots & \mathbb{B}^{(r,q)} \end{array} \right) \end{matrix}$$

avec $\mathbb{A}^{(i,k)} \in \mathcal{M}_{m_i, s_k}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{B}^{(k,j)} \in \mathcal{M}_{s_k, n_j}(\mathbb{K})$ pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket, k \in \llbracket 1, r \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$.
 La matrice produit $\mathbb{P}$ peut alors s'écrire sous la forme bloc :

$$\mathbb{P} = \begin{matrix} & \begin{matrix} n_1 & \dots & n_q \end{matrix} \\ \begin{matrix} m_1 \\ \vdots \\ m_p \end{matrix} & \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbb{P}^{(1,1)} & \dots & \mathbb{P}^{(1,q)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \mathbb{P}^{(p,1)} & \dots & \mathbb{P}^{(p,q)} \end{array} \right) \end{matrix}$$

et, dans ce cas, on a la formule de multiplication par blocs :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket, \quad \mathbb{P}^{(i,j)} = \sum_{k=1}^r \mathbb{A}^{(i,k)} \mathbb{B}^{(k,j)} \in \mathcal{M}_{m_i, n_j}(\mathbb{K}) \quad (1)$$

1 Notations

On définit le i -ème *bloc ligne* de $\mathbb{A}$, $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, comment étant

$$\mathbb{A}^{(i,\cdot)} \stackrel{\text{def}}{=}_{m_i} \left(\begin{array}{c|c|c} & s_1 & \dots & s_r \\ \mathbb{A}^{(i,1)} & \dots & \mathbb{A}^{(i,r)} \end{array} \right) \in \mathcal{M}_{m_i, S}(\mathbb{K}),$$

et le k -ème *bloc colonne* de $\mathbb{A}$, $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$,

$$\mathbb{A}^{(:,k)} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}^{(1,k)} \\ \vdots \\ \mathbb{A}^{(p,k)} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{M,s_k}(\mathbb{K}),$$

2 Numérotations locales et globales

On se focalise sur la matrice bloc $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{M,S}(\mathbb{K})$. Soient $(i, k) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, r \rrbracket$. Les composantes du bloc (i, k) de la matrice $\mathbb{A}$, c'est à dire les composantes de la matrice $\mathbb{A}^{(i,k)} \in \mathcal{M}_{m_i,s_k}(\mathbb{K})$, sont notées

$$(\mathbb{A}^{(i,k)})_{\alpha,\beta} = A_{\alpha,\beta}^{(i,k)}, \quad \forall (\alpha, \beta) \in \llbracket 1, m_i \rrbracket \times \llbracket 1, s_k \rrbracket,$$

et donc

$$\mathbb{A}^{(i,k)} = \begin{pmatrix} A_{1,1}^{(i,k)} & \cdots & A_{1,s_k}^{(i,k)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m_i,1}^{(i,k)} & \cdots & A_{m_i,s_k}^{(i,k)} \end{pmatrix}$$

Ici, les indices α et β correspondent à la *numérotation locale* du bloc (i, k) de la matrice $\mathbb{A}$.

On peut noter que la 1-ère ligne de

- $\mathbb{A}^{(1,:)}$ est la ligne 1 de $\mathbb{A}$,
- $\mathbb{A}^{(2,:)}$ est la ligne $m_1 + 1$ de $\mathbb{A}$,
- $\mathbb{A}^{(3,:)}$ est la ligne $m_1 + m_2 + 1$ de $\mathbb{A}$,
- ...
- $\mathbb{A}^{(p,:)}$ est la ligne $m_1 + \dots + n_{p-1} + 1$ de $\mathbb{A}$.

On note alors

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad \mathcal{I}_i = \sum_{a=1}^{i-1} m_a. \quad (2)$$

La première ligne $\mathbb{A}^{(i,:)}$ est la ligne $\mathcal{I}_i + 1$ de $\mathbb{A}$. On en déduit donc le lien entre la *numérotation locale* des lignes de $\mathbb{A}^{(i,:)}$ et la *numérotation globale* des lignes de $\mathbb{A}$:

$$\forall \alpha \in \llbracket 1, m_i \rrbracket, \quad (\mathbb{A}^{(i,:)})_{\alpha,:} = \mathbb{A}_{\mathcal{I}_i + \alpha, :}$$

De la même manière avec les colonnes, on note

$$\forall k \in \llbracket 1, r \rrbracket, \quad \mathcal{K}_k = \sum_{b=1}^{k-1} s_b, \quad (3)$$

on obtient le lien entre la *numérotation locale* des colonnes de $\mathbb{A}^{(:,k)}$ et la *numérotation globale* des lignes de $\mathbb{A}$:

$$\forall \beta \in \llbracket 1, s_k \rrbracket, \quad (\mathbb{A}^{(:,k)})_{:, \beta} = \mathbb{A}_{:, \mathcal{K}_k + \beta}.$$

On en déduit alors

$$\forall (i, k) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, r \rrbracket, \quad \forall (\alpha, \beta) \in \llbracket 1, m_i \rrbracket \times \llbracket 1, s_k \rrbracket, \quad A_{\alpha,\beta}^{(i,k)} = \mathbb{A}_{\mathcal{I}_i + \alpha, \mathcal{K}_k + \beta}. \quad (4)$$

En notant

$$\forall j \in \llbracket 1, q \rrbracket, \quad \mathcal{J}_j = \sum_{c=1}^{j-1} n_c, \quad (5)$$

1. On a $\mathcal{I}_1 = 0$ car la somme est vide : par convention mathématique, une sommation $\sum_{k=p}^n a_k$ pour laquelle $p > n$ donne toujours un résultat égal à l'élément neutre de l'addition, c'est-à-dire 0.

on a aussi

$$\forall (k, j) \in \llbracket 1, r \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket, \quad \forall (\beta, \gamma) \in \llbracket 1, s_k \rrbracket \times \llbracket 1, n_j \rrbracket, \quad B_{\beta, \gamma}^{(k, j)} = B_{\kappa_k + \beta, \mathcal{J}_j + \gamma} \quad (6)$$

et

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket, \quad \forall (\alpha, \gamma) \in \llbracket 1, m_i \rrbracket \times \llbracket 1, n_j \rrbracket, \quad P_{\alpha, \gamma}^{(i, j)} = P_{\mathcal{I}_i + \alpha, \mathcal{J}_j + \gamma} \quad (7)$$

3 Preuve de (1)

Soient $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$ on veut démontrer que

$$\mathbb{P}^{(i, j)} = \sum_{k=1}^r \mathbb{A}^{(i, k)} \mathbb{B}^{(k, j)} \in \mathcal{M}_{m_i, n_j}(\mathbb{K})$$

Vérifions déjà la concordance des dimensions et la faisabilité du calcul de la somme. On a

$$\forall k \in \llbracket 1, r \rrbracket, \quad \mathbb{A}^{(i, k)} \in \mathcal{M}_{m_i, s_k}(\mathbb{K}) \text{ et } \mathbb{B}^{(k, j)} \in \mathcal{M}_{s_k, n_j}(\mathbb{K}).$$

Le produit $\mathbb{A}^{(i, k)} \mathbb{B}^{(k, j)}$ est donc possible et appartient à $\mathcal{M}_{m_i, n_j}(\mathbb{K})$. On a alors

$$\sum_{k=1}^r \mathbb{A}^{(i, k)} \mathbb{B}^{(k, j)} \in \mathcal{M}_{m_i, n_j}(\mathbb{K})$$

et comme $\mathbb{P}^{(i, j)} \in \mathcal{M}_{m_i, n_j}(\mathbb{K})$, la formule est plausible.

Soient $\alpha \in \llbracket 1, m_i \rrbracket$ et $\gamma \in \llbracket 1, n_j \rrbracket$, on a d'après (7), le lien entre une composante de la matrice bloc et une composante de la matrice globale

$$P_{\alpha, \gamma}^{(i, j)} = P_{\mathcal{I}_i + \alpha, \mathcal{J}_j + \gamma}.$$

Pour simplifier l'écriture, on pose $u = \mathcal{I}_i + \alpha$ et $v = \mathcal{J}_j + \gamma$. On a donc $u \in \llbracket 1, M \rrbracket$ et $v \in \llbracket 1, N \rrbracket$. La formule classique d'un produit matriciel s'écrit

$$P_{u, v} = \sum_{w=1}^S A_{u, w} B_{w, v}.$$

Pour que la formule (1) soit juste, il est nécessaire et suffisant de démontrer que

$$\left(\sum_{k=1}^r \mathbb{A}^{(i, k)} \mathbb{B}^{(k, j)} \right)_{\alpha, \gamma} = \sum_{w=1}^S A_{u, w} B_{w, v}. \quad (8)$$

Pour simplifier l'écriture, on pose

$$x \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{k=1}^r \mathbb{A}^{(i, k)} \mathbb{B}^{(k, j)} \right)_{\alpha, \gamma} = \sum_{k=1}^r (\mathbb{A}^{(i, k)} \mathbb{B}^{(k, j)})_{\alpha, \gamma}.$$

Comme $\mathbb{A}^{(i, k)} \in \mathcal{M}_{m_i, s_k}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{B}^{(k, j)} \in \mathcal{M}_{s_k, n_j}(\mathbb{K})$, le produit matriciel usuel donne

$$(\mathbb{A}^{(i, k)} \mathbb{B}^{(k, j)})_{\alpha, \gamma} = \sum_{\beta=1}^{s_k} A_{\alpha, \beta}^{(i, k)} B_{\beta, \gamma}^{(k, j)}$$

et donc

$$x = \sum_{k=1}^r \sum_{\beta=1}^{s_k} A_{\alpha, \beta}^{(i, k)} B_{\beta, \gamma}^{(k, j)}.$$

En utilisant les liens entre les composantes des matrices blocs et les composantes des matrices globales données en (4) et (6), on a

$$\begin{aligned} x &= \sum_{k=1}^r \sum_{\beta=1}^{s_k} A_{\mathcal{I}_i + \alpha, \mathcal{K}_k + \beta} B_{\mathcal{K}_k + \beta, \mathcal{J}_j + \gamma} \\ &= \sum_{k=1}^r \sum_{\beta=1}^{s_k} A_{u, \mathcal{K}_k + \beta} B_{\mathcal{K}_k + \beta, v}. \end{aligned}$$

On peut noter que les ensembles $F_k \stackrel{\text{def}}{=} \llbracket \mathcal{K}_k + 1, \mathcal{K}_k + s_k \rrbracket$, $\forall k \in \llbracket 1, r \rrbracket$, forment, par construction, une partition de l'ensemble $\llbracket 1, S \rrbracket$, c'est à dire

$$\bigcup_{k=1}^r F_k = \llbracket 1, S \rrbracket \quad \text{et} \quad (k \neq k' \Rightarrow F_k \cap F_{k'} = \emptyset).$$

On a donc

$$\begin{aligned} x &= \sum_{k=1}^r \sum_{\beta \in F_k} A_{u, \mathcal{K}_k + \beta} B_{\mathcal{K}_k + \beta, v} \\ &= \sum_{w \in \bigcup_{k=1}^r F_k} A_{u, w} B_{w, v} \\ &= \sum_{w=1}^S A_{u, w} B_{w, v}. \end{aligned}$$

L'équation (1) est donc démontrée, ce qui achève la démonstration. ■