MACS 2 **EDP**
Sup'Galilée **Année 2019-2020**

Travaux pratiques - Langage C et EDP [1]

Dérivation numérique

Table des matières

1 Approximation de dérivées premières **1**

2 Approximation de dérivées secondes **2**

Dans ce TP on utilisera le code fourni (**matwrapper**) pour effectuer les représentations graphiques sous Matlab à partir d'un code C. Pour gérer les tableaux 1D, on pourra utiliser la structure `vector` de la librairie **SLAC** développée précédamment.

1 Approximation de dérivées premières

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[a, b]$ et suffisament régulière.

Q. 1 *Montrer que l'on a*

$$f'(\bar{x}) = \frac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x})}{h} + \mathcal{O}(h) \tag{1.1}$$

$$f'(\bar{x}) = \frac{f(\bar{x}) - f(\bar{x}-h)}{h} + \mathcal{O}(h) \tag{1.2}$$

■

Q. 2 *On note $x_i = a + ih$, $i \in [\![0, n]\!]$, une discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$. Soit une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ suffisament régulière. On suppose que les y_i sont donnés par*

$$y_i = f(x_i), \quad \forall i \in [\![0, n]\!]. \tag{1.3}$$

■

Ecrire une fonction Derive1 *permettant de calculer des approximations d'ordre 1 de $f'(x_i)$ pour $i \in [\![0, n]\!]$. Un prototype de fonction possible est*

Vector Derive1(**double** (∗pf)(**double**), Vector x)

Pour obtenir une formule d'approximation d'ordre 2 de $f'(\bar{x})$, on suppose $f \in \mathcal{C}^3(]a, b[)$ et on peut alors développer les formules de Taylor de $f(\bar{x}+h)$ et $f(\bar{x}-h)$ jusqu'au troisième ordre.
On obtient alors

$$f'(\bar{x}) = \frac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x}-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2). \tag{1.4}$$

- Cette approximation est la formule des **différences finies centrées**.
- Cette approximation est d'ordre 2.

1. version du 16 octobre 2019 à 16:19

Q. 3 *Montrer que l'on a les deux formules suivantes*

$$f'(\bar{x}) = -\frac{f(\bar{x}+2h) - 4f(\bar{x}+h) + 3f(\bar{x})}{2h} + \mathcal{O}(h^2), \tag{1.5}$$

$$f'(\bar{x}) = \frac{3f(\bar{x}) - 4f(\bar{x}-h) + f(\bar{x}-2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2). \tag{1.6}$$

■

Q. 4 *On note $x_i = a + ih$, $i \in [\![0, n]\!]$, une discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$. Soit une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ suffisament régulière. On suppose que les y_i sont donnés par*

$$y_i = f(x_i), \quad \forall i \in [\![0, n]\!]. \tag{1.7}$$

Ecrire une fonction Derive2 *permettant de calculer des approximations d'ordre 2 de $f'(x_i)$ pour $i \in [\![0, n]\!]$.* ■

Q. 5 *Ecrire un programme, nommé* erreurDerive *, permettant de vérifier graphiquement, pour chacune des 2 fonctions précédentes , l'ordre des erreurs. voir figure 1.* ■

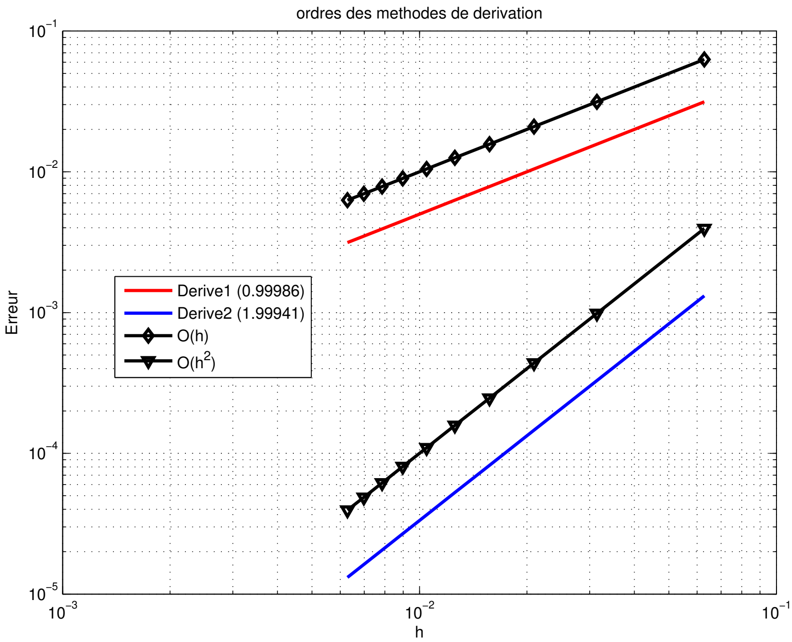

FIGURE 1 – Ordre de l'erreur des méthodes de dérivation

2 Approximation de dérivées secondes

L'objectif ici est déterminer une approximation d'ordre 2 de la dérivée seconde d'une fonction f (suffisament régulière) en les points d'une discrétisation régulière $x_i = a + ih$, $i \in [\![0, n]\!]$, de l'intervalle $[a, b]$.

Q. 6 1. *Montrer que l'on a la formule suivante utilisant deux points de part et d'autres de $\bar{x}$:*

$$f^{(2)}(\bar{x}) = \frac{f(\bar{x}+h) - 2f(\bar{x}) + f(\bar{x}-h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \tag{2.1}$$

2. *On va établir une formule n'utilisant que des points après $\bar{x}$. Pour celà montrer que*

$$h^2 f^{(2)}(\bar{x}) = f(\bar{x}) - 2f(\bar{x}+h) + f(\bar{x}+2h) - h^3 f^{(3)}(\bar{x}) + \mathcal{O}(h^4), \tag{2.2}$$

$$3h^2 f^{(2)}(\bar{x}) = 2f(\bar{x}) - 3f(\bar{x}+h) + f(\bar{x}+3h) - 4h^3 f^{(3)}(\bar{x}) + \mathcal{O}(h^4). \tag{2.3}$$

Puis en déduire

$$f^{(2)}(\bar{x}) = \frac{2f(\bar{x}) - 5f(\bar{x}+h) + 4f(\bar{x}+2h) - f(\bar{x}+3h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2). \tag{2.4}$$

3. *Etablir la formule suivante n'utilisant que des points avant $\bar{x}$:*

$$f^{(2)}(\bar{x}) = \frac{2f(\bar{x}) - 5f(\bar{x}-h) + 4f(\bar{x}-2h) - f(\bar{x}-3h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2). \tag{2.5}$$

■

Q. 7 *Ecrire une fonction* DeriveSec2 *permettant de calculer des approximations d'ordre 2 de $f^{(2)}(x_i)$ pour $i \in [\![0, n]\!]$.* ■

Q. 8 *Ecrire un programme, nommé* erreurDeriveSeconde *, permettant de vérifier/retrouver graphiquement, l'ordre de la méthode d'approximation précédente. voir figure 2.* ■

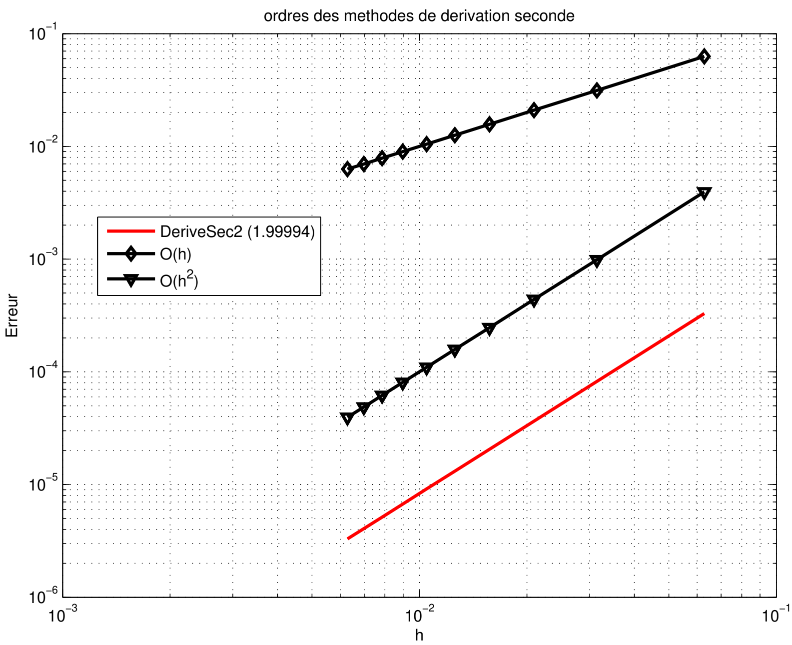

FIGURE 2 – Ordre de l'erreur de l'approximation de la dérivée seconde