

Ingénieurs MACS 2 - TP F.E.M. (S8)

Eléments finis $\mathbb{P}_1$ -Lagrange en dimension ≥ 1 : épisode 1

Espace fonctionnel des éléments finis $\mathbb{P}_1$ -Lagrange

François Cuvelier

Laboratoire d'Analyse Géométrie et Applications
Institut Galilée
Université Paris XIII.

F.E.M.: épisode 1 [1 / 16]

Espace fonctionnel E.F. $\mathbb{P}_1$ -Lagrange

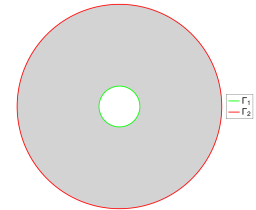
2022/03/24

Prérequis

- Notion de maillages,
- Eléments finis $\mathbb{P}_1$ -Lagrange en dimension 1,
→ voir vidéos dédiées

Objectif : approcher $u \in \mathcal{C}^0(\Omega_1; \mathbb{R})$ ou $u \in \mathcal{C}^0(\Gamma_1; \mathbb{R})$ ou $u \in \mathcal{C}^0(\Gamma_2; \mathbb{R})$ par exemples

- Espaces des éléments finis $\mathbb{P}_1$ -Lagrange sur un maillage,
- Fonctions de base associées.



Plan

- 1 Maillage
- 2 Espace discret
- 3 Fonctions de base
- 4 Interpolation

F.E.M.: épisode 1 [3 / 16]

Espace fonctionnel E.F. $\mathbb{P}_1$ -Lagrange

1. Maillage

F.E.M.: épisode 1 [2 / 16]

Espace fonctionnel E.F. $\mathbb{P}_1$ -Lagrange

2022/03/24

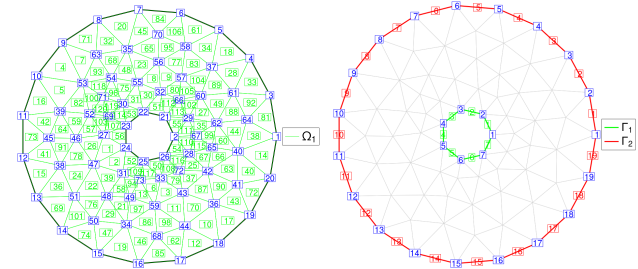


Figure: Ω^h : maillage d'un anneau $\Omega = \Omega_1$, Γ_1 bord intérieur, Γ_2 bord extérieur.

Composé de trois maillages **élémentaires**, deux sont décrits :

- $\Omega_1^h (= \Omega^h)$: **q1**, size = (2, n_q); **me1**, size = (3, n_{me}); **toG1**, size = (1, n_q) avec $n_q = 73$, $n_{me} = 120$,
 $\Omega_1^h = \bigcup_{k=1}^{n_{me}} T_k$, et T_k , triangle de sommets **q1**(:, **me1**(:, k)).
- Γ_1^h : **q_b1**, size = (2, n_q); **me_b1**, size = (2, n_{me}); **toG_b1**, size = (1, n_q) avec $n_q = 7$, $n_{me} = 7$,
 $\Gamma_1^h = \bigcup_{k=1}^{n_{me}} S_k$, et S_k , segment de sommets **q_b1**(:, **me_b1**(:, k)).

Dans ce maillage particulier, on a: **q_b1** == **q1**(:, **toG_b1**)

voir [ep01.ring00](#)

F.E.M.: épisode 1 [4 / 16]

Espace fonctionnel E.F. $\mathbb{P}_1$ -Lagrange

1. Maillage

Plan

- 1 Maillage
- 2 Espace discret
- 3 Fonctions de base
- 4 Interpolation

- E_h un maillage **élémentaire** composé de d -simplexes en dimension n :
 qh , $size = (n, n_q)$; meh , $size = (d + 1, n_{me})$; $toGh$, $size = (1, n_q)$
$$E_h = \bigcup_{k=1}^{n_{me}} K_k \subset \mathbb{R}^n$$
, et K_k , d -simplexe de sommets $qh(:, meh(:, k))$.
- $V(E_h)$ espace fonctionnel $\mathbb{P}_1$ -Lagrange associé au maillage élémentaire E_h :

$$V(E_h) = \{v \in \mathcal{C}^0(E_h; \mathbb{K}) \text{ tq } \forall k \in \llbracket 1, n_{me} \rrbracket, \forall \kappa_k \in \mathbb{K}_1[X_1, \dots, X_n]\}$$

Traduction: $V(E_h)$, *espace des fonctions continus sur E_h à valeurs dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) telles que leurs restrictions à K_k soit un polynôme de degré 1, pour tout k .*
🔊 $\dim(\mathbb{K}_1[X_1, \dots, X_n])$?

Notations : $qh = E_h.q$, $meh = E_h.me$, $toGh = E_h.toGlobal$, $n_q = E_h.n_q$, $n_{me} = E_h.n_{me}$, ...
Sur le maillage de l'anneau:

$$\mathcal{C}^0(\Omega; \mathbb{K}) \approx V(\Omega_1^h), \quad \mathcal{C}^0(\Gamma_1; \mathbb{K}) \approx V(\Gamma_1^h) \quad \text{et} \quad \mathcal{C}^0(\Gamma_2; \mathbb{K}) \approx V(\Gamma_2^h).$$
$$\Omega_1^h.n_q \neq \Gamma_1^h.n_q \neq \Gamma_2^h.n_q, \dots$$

Chaque maillage élémentaire E_h possède son propre jeu de données:

- $E_h.q$, $size = (n, n_q)$; $E_h.me$, $size = (d + 1, n_{me})$; $E_h.toGlobal$, $size = (1, n_q)$
→ avec $n_q = E_h.n_q$, $n_{me} = E_h.n_{me}$, $n = E_h.n$, ...
$$V(E_h) = \{v \in \mathcal{C}^0(E_h; \mathbb{K}) \text{ tq } \forall k \in \llbracket 1, n_{me} \rrbracket, \forall \kappa_k \in \mathbb{K}_1[X_1, \dots, X_n]\}$$

Propriétés: espace $V(E_h)$

- espace vectoriel, $\dim(V(E_h)) = n_q$,
- Soit $i \in \llbracket 1, n_q \rrbracket$, $\exists ! \varphi_i \in V(E_h)$ tel que
$$\varphi_i(q^j) = \delta_{ij}, \quad \forall j \in \llbracket 1, n_q \rrbracket, \quad \text{où } q^j \stackrel{\text{def}}{=} E_h.q^j$$
- $\{\varphi_i\}_{i=1}^{n_q}$ base de $V(E_h)$,
- les φ_i sont appelées fonctions de base $\mathbb{P}_1$ -Lagrange associées à E_h , notées aussi $E_h.\varphi_i$.
- $\varphi_i \equiv 0$ sur K_k , si $q^i \notin K_k \Rightarrow \text{supp}(\varphi_i) = \bigcup_{\{k \in \llbracket 1, n_{me} \rrbracket; q^i \in K_k\}}$ K_k .

$$u_h \in V(E_h) \iff u_h = \sum_{i=1}^{n_q} \mu_i \varphi_i \iff u_h(q) = \sum_{i=1}^{n_q} \mu_i \varphi_i(q), \quad \forall q \in E_h$$

Plan

- 1 Maillage
- 2 Espace discret
- 3 Fonctions de base
- 4 Interpolation

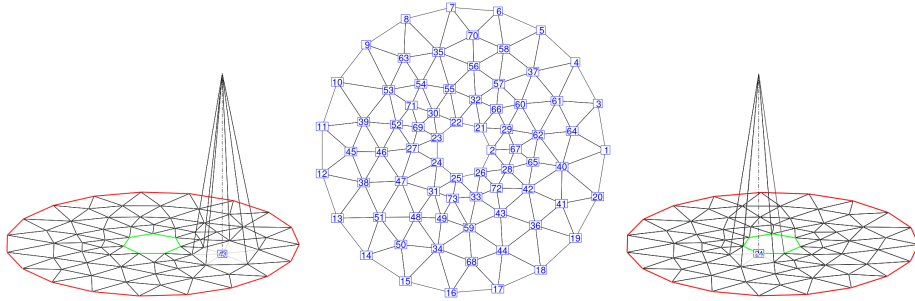


Figure: Numérotation des noeuds de Ω^h (centre), fonctions de base $\Omega^h.\varphi_{43}$ (gauche) et $\Omega^h.\varphi_{24}$ (droite) appartenant à $V(\Omega^h)$.

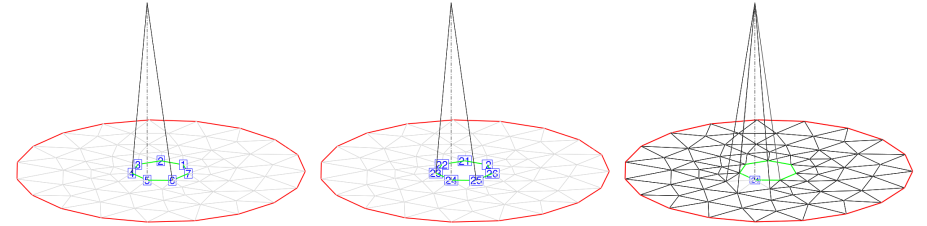


Figure: Fonction de base $\Gamma_1^h.\varphi_5$, numérotation locale (gauche) et globale (centre). Fonction de base $\Omega^h.\varphi_{24}$ (droite).

Avec $\gamma_{\Gamma_1^h} : V(\Omega^h) \longrightarrow V(\Gamma_1^h)$, fonction trace/restriction:

$$\gamma_{\Gamma_1^h}(\Omega^h.\varphi_{24}) = \Gamma_1^h.\varphi_5$$

E_h maillage élémentaire de Ω^h . La restriction/trace sur E_h d'une fonction de base $\mathbb{P}_1$ -Lagrange de $V(\Omega^h)$ est une fonction de base $\mathbb{P}_1$ -Lagrange de $V(E_h)$:

soit $i \in \llbracket 1, E_h.n_q \rrbracket$ et $r = E_h.toGlobal(i)$, ($r \in \llbracket 1, \Omega^h.n_q \rrbracket$).

$$E_h.\varphi_i = \Omega^h.\varphi_{r|E_h}$$

voir Voir [ep01.ring01](#)

→ résultat utile pour la résolution de B.V.P. (Boundary Value Problem)!

Plan

- 1 Maillage
- 2 Espace discret
- 3 Fonctions de base
- 4 Interpolation

$\mathcal{C}^0(\Omega; \mathbb{K}) \approx V(\Omega_1^h) = \text{Vect} \{ \varphi_1, \dots, \varphi_{n_q} \}$ avec $n_q = \Omega_1^h.n_q$, $\varphi_i = \Omega_1^h.\varphi_i$, $\dots$,
 $\Rightarrow \forall v_h \in V(\Omega_1^h)$, il existe $\boldsymbol{\mu} = (\mu_i)_{i=1}^{n_q} \in \mathbb{K}^{n_q}$ unique tels que

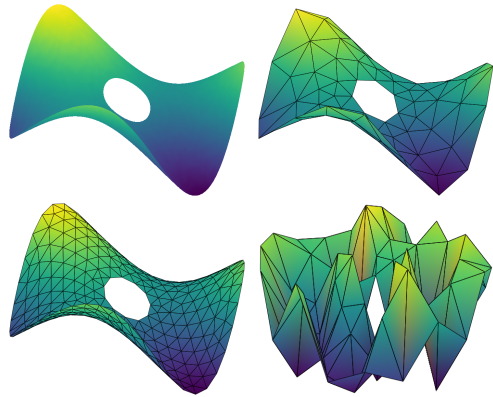
$$v_h(q) = \sum_{i=1}^{n_q} \mu_i \varphi_i(q), \quad \forall q \in \Omega_1^h.$$

$$v_h(q^j) = \sum_{i=1}^{n_q} \underbrace{\mu_i \varphi_i(q^j)}_{=\delta_{i,j}} = \mu_j, \quad q^j = \Omega_1^h.q^j.$$

Soient $u \in \mathcal{C}^0(\Omega; \mathbb{K})$ et $\boldsymbol{U} = (U_i)_{i=1}^{n_q} \in \mathbb{K}^{n_q}$, avec $U_i = u(q^i)$. Alors

$$u(q) \approx \sum_{i=1}^{n_q} u(q^i) \varphi_i(q) = \sum_{i=1}^{n_q} U_i \varphi_i(q) \stackrel{\text{def}}{=} \pi_h(u)(q)$$

$$\text{Op. d'interpolation} \begin{cases} \pi_h : V(\Omega_1) \longrightarrow V(\Omega_1^h) \\ u \longmapsto \pi_h(u) = \sum_{i=1}^{n_q} u(q^i) \varphi_i \end{cases}, \quad V(\Omega_1) = \mathcal{C}^0(\Omega; \mathbb{K}) \text{ ou } H^1(\Omega_1) \text{ ou}$$



$$f = @(x,y) \cos(\pi \cdot x) \cdot \sin(\pi/3 \cdot y);$$

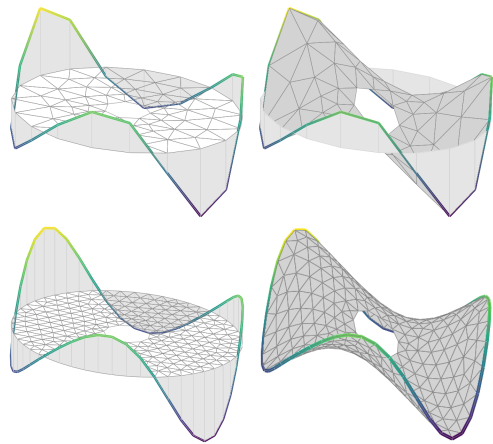
Représentation de $u_h \in V(\Omega_1^h)$

$$u_h(q) = \sum_{i=1}^{n_q} U_i \varphi_i(q)$$

en notant $q^i = \Omega_1^h \cdot q^i \in \mathbb{R}^2$

- haut-gauche:
Maillage fin ($\Omega_1^h \cdot n_q = 3328$),
 $U_i = f(q_1^i, q_2^i)$
- haut:
Maillage grossier ($\Omega_1^h \cdot n_q = 73$),
 $U_i = f(q_1^i, q_2^i)$
- bas-gauche:
Maillage moyen ($\Omega_1^h \cdot n_q = 298$),
 $U_i = f(q_1^i, q_2^i)$
- bas-droit:
Maillage grossier ($\Omega_1^h \cdot n_q = 73$),
 $U_i = \text{rand}()$

voir [ep01.ring02](#)



$$f = @(x,y) \cos(\pi \cdot x) \cdot \sin(\pi/3 \cdot y);$$

Représentation de $u_h \in V(\Gamma_2^h)$

$$u_h(q) = \sum_{i=1}^{n_q} U_i \varphi_i(q)$$

avec $q^i = \Gamma_2^h \cdot q^i \in \mathbb{R}^2$ et $U_i = f(q_1^i, q_2^i)$

- haut:
Maillage grossier ($\Gamma_2^h \cdot n_q = 19$),
- bas:
Maillage moyen ($\Gamma_2^h \cdot n_q = 51$),
- gauche: avec maillage
- droite: avec f en gris foncé

voir [ep01.ring03](#)

$$\mathcal{C}^0(\Gamma_2; \mathbb{K}) \approx V(\Gamma_2^h) = \text{Vect} \{ \varphi_1, \dots, \varphi_{n_q} \}$$

- Notations (locales):

$$q = \Gamma_2^h \cdot q, \quad n_q = \Gamma_2^h \cdot n_q, \quad m_e = \Gamma_2^h \cdot m_e, \quad \dots, \quad \varphi_i = \Gamma_2^h \cdot \varphi_i, \quad \dots$$

Soient $u \in \mathcal{C}^0(\Gamma_2; \mathbb{K})$ et $\mathbf{U} = (U_i)_{i=1}^{n_q} \in \mathbb{K}^{n_q}$, avec $U_i = u(q^i)$ et $q^i = \Gamma_2^h \cdot q^i$. Alors

$$u(q) \approx \sum_{i=1}^{n_q} u(q^i) \varphi_i(q) = \sum_{i=1}^{n_q} U_i \varphi_i(q) \stackrel{\text{def}}{=} \pi_h(u)(q)$$

$$\text{Opérateur d'interpolation} \quad \begin{cases} \pi_h : V(\Gamma_2) \longrightarrow V(\Gamma_2^h) \\ u \longmapsto \pi_h(u) = \sum_{i=1}^{n_q} u(q^i) \varphi_i \end{cases}$$

avec $V(\Gamma_2) = \mathcal{C}^0(\Gamma_2; \mathbb{K})$ ou $H^{1/2}(\Gamma_2)$ ou ...

Codes fournis

Codes fournis dans archive [ep01.tar.gz](#) permettant de reproduire les figures et utilisant le package [simesh](#) :

- ep01.ring00 à ep01.ring03 programmes Matlab/Octave,
- ep01.plot_BasisFunction fonction pour la représentation de fonctions de base en 2D,
- ep01.special_plot fonction pour la représentation de fonctions de base en 2D sur les bords,
- ring.geo fichier de géométrie pour GMSH dans répertoire geofile

Le contenu des codes n'est pas forcément à comprendre dès maintenant.