

Ingénieurs MACS 2 - TP F.E.M. (S8)

Eléments finis \mathbb{P}_1 -Lagrange en dimension > 1 : épisode 2

Coordonnées barycentriques sur un d-simplexe

François Cuvelier

Laboratoire d'Analyse Géométrie et Applications
Institut Galilée
Université Paris XIII.

Objectif :

- Définition d'un d-simplexe $K \subset \mathbb{R}^n$
- Définition des coordonnées barycentriques sur K ,
- Volume de K ,
- Gradients des coordonnées barycentriques sur K ,
- Formule d'intégration sur K

Utilisation de résultats de

[1] F.J. Vermolen and A. Segal. *On an integration rule for products of barycentric coordinates over simplexes in \mathbb{R}^n* , *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 330:289 – 294, 2018.

[2] F. Cuvelier. *Exact integration for products of power of barycentric coordinates over d-simplexes in \mathbb{R}^n* , *hal-01816347*, 2018. pdf fourni

Plan

- 1 Définitions
- 2 Résultats
- 3 Matrices élémentaires

Definition: d-simplex

A d-simplex $K \subset \mathbb{R}^n$ is the convex hull of $(d + 1)$ points $\mathbf{q}^0, \dots, \mathbf{q}^d$ of \mathbb{R}^n which form the vertices of K .

$$K = \left\{ \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{q} = \sum_{i=0}^d \theta_i \mathbf{q}^i, \text{ with } \forall i \in \llbracket 0, d \rrbracket, \theta_i \geq 0, \text{ and } \sum_{i=0}^d \theta_i = 1 \right\}. \quad (1)$$

convex hull: *enveloppe convexe.*

For example, a 2-simplex is a triangle and a 3-simplex is a tetrahedron. It will be always assumed that a d-simplex is **not degenerated**, i.e., the set of vectors $\{\mathbf{q}^i - \mathbf{q}^0\}_{i=1}^d$ is linearly independent.

Definition: barycentric coordinates on K of \mathbf{q}

Let $K \subset \mathbb{R}^n$ be a non-degenerate d -simplex and $\{\mathbf{q}^i\}_{i=0}^d$ its vertices. The parametrization of K with a convex combination of the vertices reads as follows

$$K = \left\{ \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{q} = \sum_{i=0}^d \lambda_i(\mathbf{q}) \mathbf{q}^i, \text{ with } \forall i \in \llbracket 0, d \rrbracket, \lambda_i(\mathbf{q}) \geq 0, \text{ and } \sum_{i=0}^d \lambda_i(\mathbf{q}) = 1 \right\}. \quad (2)$$

The coefficients $\lambda_0(\mathbf{q}), \dots, \lambda_d(\mathbf{q})$ are called the barycentric coordinates on K of \mathbf{q} .

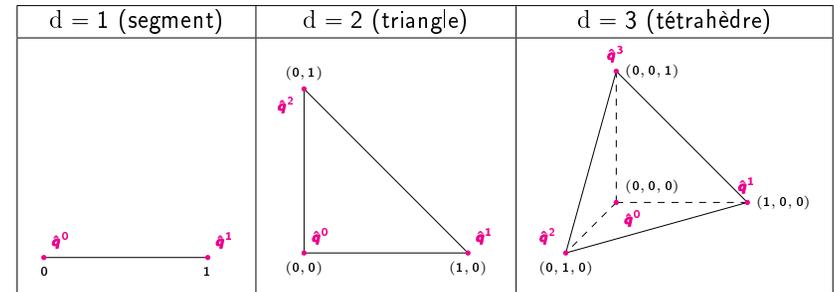
As immediat property, the barycentric coordinates on K satisfy

$$\lambda_i(\mathbf{q}^j) = \delta_{i,j}, \quad \forall (i,j) \in \llbracket 0, d \rrbracket. \quad (3)$$

The unit d -simplex $\hat{K}^d \subset \mathbb{R}^d$ is defined by the $(d + 1)$ vertices

$$\{\hat{\mathbf{q}}^0, \hat{\mathbf{q}}^1, \dots, \hat{\mathbf{q}}^d\} = \{0, \hat{\mathbf{e}}^1, \dots, \hat{\mathbf{e}}^d\}$$

where $\{\hat{\mathbf{e}}^1, \dots, \hat{\mathbf{e}}^d\}$ is the standard basis of \mathbb{R}^d .



Représentation de d -simplexes unités \hat{K}^d

Le volume du d -simplexe unité \hat{K}^d , noté $|\hat{K}^d|$, est $\frac{1}{d!}$

Plan

- 1 Définitions
- 2 Résultats
- 3 Matrices élémentaires

Theorem: integration, change of variables, [2] page 8.

Let $K \subset \mathbb{R}^n$ be a non-degenerated d -simplex and $f : K \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\int_K f(\mathbf{q}) d\mathbf{q} = |\det(\Delta_K^t \Delta_K)|^{1/2} \int_{\hat{K}} f \circ \mathcal{F}_K(\hat{\mathbf{q}}) d\hat{\mathbf{q}} \quad (4)$$

where \hat{K} is the unit d -simplex in \mathbb{R}^d , $\Delta_K \in \mathcal{M}_{n,d}(\mathbb{R})$ is defined by

$$\Delta_K = \left(\mathbf{q}^1 - \mathbf{q}^0 \mid \mathbf{q}^2 - \mathbf{q}^0 \mid \dots \mid \mathbf{q}^d - \mathbf{q}^0 \right) \quad (5)$$

and $\mathcal{F}_K : \hat{K} \rightarrow K$ is given by

$$\mathcal{F}_K(\hat{\mathbf{q}}) = \Delta_K \hat{\mathbf{q}} + \mathbf{q}^0 \quad (6)$$

Avec $d = n$,
$$\int_K f(\mathbf{q}) d\mathbf{q} = |\det(\Delta_K)| \int_{\hat{K}} f \circ \mathcal{F}_K(\hat{\mathbf{q}}) d\hat{\mathbf{q}}$$

Exo: Calcul de $|K|$, volume du d -simplex $K \subset \mathbb{R}^n$ de sommets $\{\mathbf{q}^i\}_{i=0}^d$

Rappels:

- 1 $\int_K f(\mathbf{q}) d\mathbf{q} = |\det(\mathbb{A}_K^t \mathbb{A}_K)|^{1/2} \int_{\hat{K}} f \circ \mathcal{F}_K(\hat{\mathbf{q}}) d\hat{\mathbf{q}}$
- 2 $\mathbb{A}_K = \left(\mathbf{q}^1 - \mathbf{q}^0 \mid \mathbf{q}^2 - \mathbf{q}^0 \mid \dots \mid \mathbf{q}^d - \mathbf{q}^0 \right) \in \mathcal{M}_{n,d}(\mathbb{R})$
- 3 $|\hat{K}| = 1/d!$

Le volume de d -simplexe $K \subset \mathbb{R}^n$ de sommets $\{\mathbf{q}^i\}_{i=0}^d$ est

$$|K| = \frac{1}{d!} |\det(\mathbb{A}_K^t \mathbb{A}_K)|^{1/2}$$

avec

$$\mathbb{A}_K = \left(\mathbf{q}^1 - \mathbf{q}^0 \mid \mathbf{q}^2 - \mathbf{q}^0 \mid \dots \mid \mathbf{q}^d - \mathbf{q}^0 \right) \in \mathcal{M}_{n,d}(\mathbb{R})$$

Si $d = n$, on a aussi

$$|K| = \frac{1}{d!} |\det(\mathbb{A}_K)|$$

Exo: écrire une fonction Octave/Matlab, [volume](#), permettant de calculer $|K|$. Cette fonction sera enregistrée dans le répertoire `+simplex`.

Lemma: gradients of barycentric coordinates on a d -simplex , [2] page 6.

Let $K \subset \mathbb{R}^n$ be a non-degenerate d -simplex and $\{\mathbf{q}^i\}_{i=0}^d$ its vertices. The barycentric coordinates $(\lambda_i(\mathbf{q}))_{i=0}^d$ are solution of the linear system

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & & & \\ \vdots & \mathbb{A}_K^t \mathbb{A}_K & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0(\mathbf{q}) \\ \lambda_1(\mathbf{q}) \\ \vdots \\ \lambda_d(\mathbf{q}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ \mathbb{A}_K(\mathbf{q} - \mathbf{q}^0) \end{pmatrix} \quad (7)$$

where $\mathbb{A}_K \in \mathcal{M}_{n,d}(\mathbb{R})$ is defined by

$$\mathbb{A}_K = \left(\mathbf{q}^1 - \mathbf{q}^0 \mid \dots \mid \mathbf{q}^d - \mathbf{q}^0 \right) \quad (8)$$

The barycentric coordinates are multivariate polynomials of first degree and their gradients are given by

$$\left(\nabla \lambda_1(\mathbf{q}) \mid \dots \mid \nabla \lambda_d(\mathbf{q}) \right) = \mathbb{A}_K (\mathbb{A}_K^t \mathbb{A}_K)^{-1} \quad (9)$$

and

$$\nabla \lambda_0(\mathbf{q}) = - \sum_{i=1}^d \nabla \lambda_i(\mathbf{q}). \quad (10)$$

Les $\nabla \lambda_i(\mathbf{q})$ sont **constants**.

$$\text{Avec } d = n, \quad \left(\nabla \lambda_1(\mathbf{q}) \mid \dots \mid \nabla \lambda_d(\mathbf{q}) \right) = (\mathbb{A}_K^{-1})^t \quad (11)$$

Exo: écrire une fonction Octave/Matlab, [gradBaCo](#), permettant de calculer, $\forall i \in \llbracket 0, d \rrbracket$, $\nabla \lambda_i(\mathbf{q})$ sur K , retournés sous la forme d'une matrice de $\mathcal{M}_{d+1,n}(\mathbb{R})$. Cette fonction sera enregistrée dans le répertoire `+simplex`.

- 1 K : d -simplexe $K \subset \mathbb{R}^n$ de sommets $\{\mathbf{q}^i\}_{i=0}^d$,
- 2 $\mathbb{A}_K = \left(\mathbf{q}^1 - \mathbf{q}^0 \mid \mathbf{q}^2 - \mathbf{q}^0 \mid \dots \mid \mathbf{q}^d - \mathbf{q}^0 \right) \in \mathcal{M}_{n,d}(\mathbb{R})$
- 3 $\left(\nabla \lambda_1(\mathbf{q}) \mid \dots \mid \nabla \lambda_d(\mathbf{q}) \right) = \mathbb{A}_K (\mathbb{A}_K^t \mathbb{A}_K)^{-1} \left(= (\mathbb{A}_K^{-1})^t, \text{ si } d = n \right)$
- 4 $\nabla \lambda_0(\mathbf{q}) = - \sum_{i=1}^d \nabla \lambda_i(\mathbf{q})$.

Theorem: magic formula on a d -simplex $K \subset \mathbb{R}^n$, [2] page 2.

Let $\nu = (\nu_0, \dots, \nu_d) \in \mathbb{N}^{d+1}$, then

$$\int_K \prod_{i=0}^d \lambda_i^{\nu_i}(\mathbf{q}) d\mathbf{q} = d! |K| \frac{\prod_{i=0}^d (\nu_i!)}{(d + \sum_{i=0}^d \nu_i)!} \quad (12)$$

where $|K|$ is the volume of K and $(\lambda_i(\mathbf{q}))_{i=0}^d$ are the barycentric coordinates on K of \mathbf{q} .

→ On utilisera cette formule dans le cadre de la méthode des **éléments finis \mathbb{P}_1 -Lagrange**.

Plan

- 1 Définitions
- 2 Résultats
- 3 Matrices élémentaires

Définition 1: matrice élémentaire de \mathcal{D} sur un d -simplexe $K \subset \mathbb{R}^n$

Soient $\{\mathbf{q}^i\}_{i=0}^d$ les $(d+1)$ sommets de K , $\{\lambda_i\}_{i=0}^d$ les coordonnées barycentriques de K et $\mathcal{D}(\bullet, \bullet)$ un opérateur bilinéaire.

Alors $\mathbb{A}^{e,\mathcal{D}}(K) \in \mathcal{M}_{d+1}(\mathbb{R})$, **matrice élémentaire de \mathcal{D} sur K** , est définie par

$$\mathbb{A}_{i+1,j+1}^{e,\mathcal{D}}(K) = \int_K \mathcal{D}(\lambda_j, \lambda_i)(\mathbf{q}) d\mathbf{q}, \quad \forall (i,j) \in \llbracket 0, d \rrbracket^2 \quad (13)$$

- avec $\mathcal{D}(u, v) = u \cdot v$: **matrice de Masse élémentaire**,
- avec $\mathcal{D}(u, v) = \langle \nabla u, \nabla v \rangle$: **matrice de Rigidité élémentaire**, si $d < n$ alors ∇ correspond au gradient surfacique ou tangentiel.
- $(r, s) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $\mathcal{D}(u, v) = \frac{\partial u}{\partial x_r} \cdot v$, $\mathcal{D}(u, v) = \frac{\partial u}{\partial x_r} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_s}$, ...

Exo:

- Calculer la **matrice de Masse élémentaire** (i.e. avec $\mathcal{D}(u, v) = u \cdot v$) en fonction de d et de $|K|$ (volume de K).
- Vérifier que $\sum_{i=1}^{d+1} \sum_{j=1}^{d+1} \mathbb{A}_{i,j}^{e,\mathcal{D}}(K) = |K|$.

$$\mathbb{A}_{i+1,j+1}^{e,\mathcal{D}}(K) = \int_K \mathcal{D}(\lambda_j, \lambda_i)(\mathbf{q}) d\mathbf{q} = \int_K \lambda_j(\mathbf{q}) \lambda_i(\mathbf{q}) d\mathbf{q}, \quad \forall (i,j) \in \llbracket 0, d \rrbracket^2$$

$$\int_K \prod_{i=0}^d \lambda_i^{\nu_i}(\mathbf{q}) d\mathbf{q} = d! |K| \frac{\prod_{i=0}^d (\nu_i!)}{(d + \sum_{i=0}^d \nu_i)!} \quad \text{avec } \nu = (\nu_0, \dots, \nu_d) \in \mathbb{N}^{d+1},$$

Exo: Ecrire une fonction Matlab/Octave, [MasseElem](#), permettant de calculer la **matrice de Masse élémentaire** pour le d-simplexe $K \subset \mathbb{R}^n$. Cette fonction sera enregistrée dans le répertoire +simplex.

$$\textcircled{1} \mathbb{A}_{i+1,j+1}^{e,\mathcal{D}}(K) = \int_K \lambda_j(\mathbf{q}) \lambda_i(\mathbf{q}) d\mathbf{q} = \frac{|K|}{(d+1)(d+2)} (1 + \delta_{ij}), \quad \forall (i,j) \in \llbracket 0, d \rrbracket^2$$

Exo:

- ⓐ Calculer la **matrice de Rigidité élémentaire** (i.e. avec $\mathcal{D}(u, v) = \langle \nabla u, \nabla v \rangle$) en fonction de $|K|$ (volume de K) et des gradients des coordonnées barycentriques sur K .
- ⓑ Vérifier que $\sum_{i=1}^{d+1} \mathbb{A}_{i,j}^{e,\mathcal{D}}(K) = \sum_{i=1}^{d+1} \mathbb{A}_{j,i}^{e,\mathcal{D}}(K) = 0, \quad \forall j \in \llbracket 1, d+1 \rrbracket$

$$\textcircled{1} \mathbb{A}_{i+1,j+1}^{e,\mathcal{D}}(K) = \int_K \mathcal{D}(\lambda_j, \lambda_i)(\mathbf{q}) d\mathbf{q} = \int_K \langle \nabla \lambda_j(\mathbf{q}), \nabla \lambda_i(\mathbf{q}) \rangle d\mathbf{q}, \quad \forall (i,j) \in \llbracket 0, d \rrbracket^2$$

$$\textcircled{2} \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i(\mathbf{q}) = 1$$

Exo: Ecrire une fonction Matlab/Octave, [RigiditeElem](#), permettant de calculer la **matrice de Rigidité élémentaire** pour le d-simplexe $K \subset \mathbb{R}^n$. Cette fonction sera à données minimales et enregistrée dans le répertoire +simplex.

$$\textcircled{1} \mathbb{A}_{i+1,j+1}^{e,\mathcal{D}}(K) = \int_K \langle \nabla \lambda_j(\mathbf{q}), \nabla \lambda_i(\mathbf{q}) \rangle d\mathbf{q} = |K| \langle \nabla \lambda_j(\mathbf{q}), \nabla \lambda_i(\mathbf{q}) \rangle, \quad \forall (i,j) \in \llbracket 0, d \rrbracket^2$$

Exo: Soient $r \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $\mathcal{D}(u, v) = \frac{\partial u}{\partial x_r} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_s}$.

- ⓐ Calculer la matrice élémentaire $\mathbb{A}^{e,\mathcal{D}}(K)$ en fonction de $|K|$ (volume de K), des gradients des coordonnées barycentriques sur K et de r .
- ⓑ Ecrire une fonction Matlab/Octave, [MatElem_duv](#), permettant de calculer cette matrice.

☞ **Travail à faire en autonomie**

Exo: Soit $(r, s) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ et $\mathcal{D}(u, v) = \frac{\partial u}{\partial x_r} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_s}$.

- ⓐ Calculer la matrice élémentaire $\mathbb{A}^{e,\mathcal{D}}(K)$ en fonction de $|K|$ (volume de K), des gradients des coordonnées barycentriques sur K , de r et de s .
- ⓑ Ecrire une fonction Matlab/Octave, [MatElem_dudv](#), permettant de calculer cette matrice.

☞ **Travail à faire en autonomie**

Fonctions Matlab/Octave écrites

- `simplex.volume`  fichier `volume.m` dans répertoire `+simplex`
- `simplex.gradBaCo`  fichier `gradBaCo.m` dans répertoire `+simplex`
- `simplex.MasseElem`  fichier `MasseElem.m` dans répertoire `+simplex`
- `simplex.RigiditeElem`  fichier `RigiditeElem.m` dans répertoire `+simplex`