

Ingénieurs MACS 2 - TP F.E.M. (S8)

Eléments finis \mathbb{P}_1 -Lagrange en dimension ≥ 1 : épisode 5

B.V.P. : formulation variationnelle

François Cuvelier

Laboratoire d'Analyse Géométrie et Applications
Institut Galilée
Université Paris XIII.

2022/03/29

B.V.P: Boundary Value Problem (problème aux limites)

Prérequis

- Cours de Mme Halpern,

Objectif :

- espaces de Sobolev,
- formulation variationnelle,
- théorème de Lax-Milgram

Bibliographie

- [QV08] Alfio M. Quarteroni and Alberto Valli.
Numerical Approximation of Partial Differential Equations.
Springer Publishing Company, Incorporated, 1st ed. 1994. 2nd printing edition, 2008.

problème modèle

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine borné, connexe de frontière, $\partial\Omega$, \mathcal{C}^1 par morceaux.

$$\partial\Omega = \Gamma^D \cup \Gamma^R, \text{ avec } \overset{\circ}{\Gamma}^D \cap \overset{\circ}{\Gamma}^R = \emptyset.$$

Trouver $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ suffisamment régulière telle que

$$\begin{cases} \eta u - \Delta u = f, & \text{dans } \Omega & (1a) \\ u = g_D, & \text{sur } \Gamma^D & (1b) \\ \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = g_R, & \text{sur } \Gamma^R & (1c) \end{cases}$$

avec η et α deux réels, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $g_D : \Gamma^D \rightarrow \mathbb{R}$ et $g_R : \Gamma^R \rightarrow \mathbb{R}$ donnés.
On choisira, plus tard, correctement ces données pour avoir existence et unicité!

Plan

- 1 Espaces de Sobolev
- 2 Formulation variationnelle
- 3 Théorème de Lax-Milgram

Définition

Pour tout entier $m \geq 0$, on appelle espace de Sobolev d'ordre m sur $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ l'espace

$$H^m(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) \text{ t.q. } \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m; D^\alpha v \in L^2(\Omega) \text{ au sens faible} \}. \quad (2)$$

avec $D^\alpha v = \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$.

Theorem

Muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{m,\Omega} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^\alpha u(q) \overline{D^\alpha v(q)} dq \quad (3)$$

et de la norme associée

$$\|u\|_{m,\Omega} = \langle u, u \rangle_{m,\Omega}^{1/2} \quad (4)$$

l'espace $H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

On note $|\cdot|_{m,\Omega}$ la semi-norme:

$$|u|_{m,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} |D^\alpha u(q)|^2 dq \right)^{1/2} \quad (5)$$

Theorem: Théorème de trace

On suppose que $\text{mes}(\Gamma^D) > 0$. Alors, l'application trace γ_{Γ^D} définie par

$$\begin{aligned} \gamma_{\Gamma^D} : H^1(\Omega) &\rightarrow L^2(\Gamma^D) \\ v &\mapsto \gamma_{\Gamma^D}(v) = v|_{\Gamma^D} \end{aligned} \quad (6)$$

est une application linéaire continue. Il existe donc une constante $C > 0$ telle que

$$\|\gamma_{\Gamma^D}(v)\|_{L^2(\Gamma^D)} \leq C \|v\|_{H^1(\Omega)}. \quad (7)$$

On note $H^{k/2}(\Gamma^D)$, $k \geq 1$ l'espace défini par

$$H^{k/2}(\Gamma^D) = \left\{ v \in L^2(\Gamma^D) \mid \exists w \in H^k(\Omega) \text{ tel que } \gamma_{\Gamma^D}(w) = v. \right\} \quad (8)$$

- Définiton de $H_{0,\Gamma^D}^1(\Omega)$

$$H_{0,\Gamma^D}^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) \text{ t.q. } \gamma_{\Gamma^D}(v) = 0\}$$

muni du produit scalaire et de la norme de $H^1(\Omega) \rightarrow$ **espace de Hilbert.**
- Définiton de $H_{g_D,\Gamma^D}^1(\Omega)$ avec $g_D \in H^{1/2}(\Gamma^D)$,

$$H_{g_D,\Gamma^D}^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) \text{ t.q. } \gamma_{\Gamma^D}(v) = g_D\}$$

$H_{g_D,\Gamma^D}^1(\Omega)$ n'est pas un espace vectoriel!

Plan			
1	Espaces de Sobolev		
2	Formulation variationnelle		
3	Théorème de Lax-Milgram		

$$\begin{cases} \eta u - \Delta u = f, & \text{dans } \Omega & (1a) & \text{Espace des fonctions tests:} \\ u = g_D, & \text{sur } \Gamma^D & (1b) & \\ \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = g_R, & \text{sur } \Gamma^R & (1c) & H_{0,\Gamma^D}^1(\Omega) \end{cases}$$

Soit $v \in H_{0,\Gamma^D}^1(\Omega)$. On effectue $\int_{\Omega} (1a).vdq$ et donc formellement

$$\eta \int_{\Omega} u.vdq - \int_{\Omega} (\Delta u).vdq = \int_{\Omega} f.vdq \quad (10)$$

On prendra $f \in L^2(\Omega)$.

Theorem 1: Formule de Green

$\forall u \in H^2(\Omega), \forall v \in H^1(\Omega),$

$$\int_{\Omega} (\Delta u)vdq = - \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle dq + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} vd\sigma \quad (11)$$

On a $v \in H_{0,\Gamma^D}^1(\Omega)$ et

$$\eta \int_{\Omega} u.vdq - \int_{\Omega} (\Delta u).vdq = \int_{\Omega} f.vdq \quad (10)$$

On suppose $u \in H^2(\Omega)$, et utilise la formule de Green

$$(10) \Leftrightarrow \eta \int_{\Omega} u.vdq + \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle dq - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} vd\sigma = \int_{\Omega} f.vdq$$

De plus, comme $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_R, \Gamma_D \cap \Gamma_R = \emptyset$, on a

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} vd\sigma = \int_{\Gamma^D} \frac{\partial u}{\partial n} vd\sigma + \int_{\Gamma^R} \frac{\partial u}{\partial n} vd\sigma$$

Comme $v \in H_{0,\Gamma^D}^1(\Omega)$, on a $\gamma_{\Gamma^D}(v) = 0$,

$$\int_{\Gamma^D} \frac{\partial u}{\partial n} vd\sigma = 0$$

et donc

$$(10) \Leftrightarrow \eta \int_{\Omega} u.vdq + \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle dq - \int_{\Gamma^R} \frac{\partial u}{\partial n} vd\sigma = \int_{\Omega} f.vdq$$

On a $v \in H_{0,\Gamma^D}^1(\Omega)$ et

$$(10) \Leftrightarrow \eta \int_{\Omega} u.vdq + \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle dq - \int_{\Gamma^R} \frac{\partial u}{\partial n} vd\sigma = \int_{\Omega} f.vdq$$

Or, sur Γ^R , on a la **condition de Robin**:

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = g_R, \quad \text{sur } \Gamma^R, \quad (1c)$$

et donc

$$(10) \Leftrightarrow \eta \int_{\Omega} u.vdq + \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle dq + \alpha \int_{\Gamma^R} uvd\sigma = \int_{\Omega} f.vdq + \int_{\Gamma^R} g_R vd\sigma$$

On prendra $g_R \in L^2(\Gamma^R)$.

Pour tout u et v dans $H^1(\Omega)$, on peut définir \mathcal{A} et \mathcal{L} :

$$\mathcal{A}(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \eta \int_{\Omega} u.vdq + \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle dq + \alpha \int_{\Gamma^R} uvd\sigma$$

$$\mathcal{L}(v) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega} f.vdq + \int_{\Gamma^R} g_R vd\sigma$$

$$(1) \begin{cases} \eta u - \Delta u = f, & \text{dans } \Omega & (1a) \\ u = g_D, & \text{sur } \Gamma^D & (1b) \\ \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = g_R, & \text{sur } \Gamma^R & (1c) \end{cases} \begin{array}{l} \bullet f \in L^2(\Omega), g_D \in H^{1/2}(\Gamma^D), g_R \in L^2(\Gamma^R). \\ \bullet \text{ La condition de Dirichlet (1b)} \rightarrow \\ u \in H_{g_D, \Gamma^D}^1(\Omega) \end{array}$$

Definition: Formulation variationnelle associée à (1)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_{g_D, \Gamma^D}^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \mathcal{A}(u, v) = \mathcal{L}(v), \forall v \in H_{0, \Gamma^D}^1(\Omega) \end{array} \right. \quad (\text{F.V.})$$

avec

$$\mathcal{A}(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \eta \int_{\Omega} u \cdot v \, d\mathbf{q} + \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle \, d\mathbf{q} + \alpha \int_{\Gamma^R} u v \, d\sigma$$

$$\mathcal{L}(v) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega} f \cdot v \, d\mathbf{q} + \int_{\Gamma^R} g_R v \, d\sigma$$

Soient $f \in L^2(\Omega)$ et $g_R \in L^2(\Gamma^R)$.
On définit $\mathcal{A} : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ et $\mathcal{L} : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\mathcal{A}(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \eta \int_{\Omega} u \cdot v \, d\mathbf{q} + \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle \, d\mathbf{q} + \alpha \int_{\Gamma^R} u v \, d\sigma$$

$$\mathcal{L}(v) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega} f \cdot v \, d\mathbf{q} + \int_{\Gamma^R} g_R v \, d\sigma$$

Exo.

- 1 Montrer que \mathcal{L} est linéaire et continue.
- 2 Montrer que \mathcal{A} est bilinéaire et continue.

A faire à la maison

Plan

- 1 Espaces de Sobolev
- 2 Formulation variationnelle
- 3 Théorème de Lax-Milgram

Theorem: Lax-Milgram

- 1 V un espace de Hilbert sur \mathbb{R} de norme $\|\cdot\|_V$.
- 2 \mathcal{L} une application linéaire et continue de V à valeurs réelles.
- 3 \mathcal{A} une application bilinéaire et continue de $V \times V$ à valeurs réelles.
- 4 \mathcal{A} est V -elliptique (coercive sur $V \times V$), c'est à dire qu'il existe une constante $\nu > 0$ telle que

$$\forall v \in V, \mathcal{A}(v, v) \geq \nu \|v\|_V^2.$$

Alors, la formulation variationnelle

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ \mathcal{A}(u, v) = \mathcal{L}(v), \forall v \in V \end{array} \right.$$

admet une unique solution.

Théorème de Lax-Milgram:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ \mathcal{A}(u, v) = \mathcal{L}(v), \forall v \in V \end{array} \right.$$

La formulation variationnelle associée à (1):

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H^1_{g_D, \Gamma^D}(\Omega) \text{ tel que} \\ \mathcal{A}(u, v) = \mathcal{L}(v), \forall v \in H^1_{0, \Gamma^D}(\Omega) \end{array} \right. \quad (\text{F.V.})$$

Peut-on utiliser le théorème de Lax-Milgram pour obtenir existence et unicité de (F.V.)?

☞ Pas directement, il va falloir utiliser un relèvement!

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H^1_{g_D, \Gamma^D}(\Omega) \text{ tel que} \\ \mathcal{A}(u, v) = \mathcal{L}(v), \forall v \in H^1_{0, \Gamma^D}(\Omega) \end{array} \right. \quad (\text{F.V.})$$

- Relèvement:

$$g_D \in H^{1/2}(\Gamma^D) \implies \exists R \in H^1(\Omega), \text{ t.q. } \gamma_{\Gamma^D}(R) = g_D.$$

Il n'y a **pas unicité du relèvement!** Mais on s'en donne un.

- On pose $w = u - R \in H^1(\Omega)$. L'application γ_{Γ^D} étant linéaire, on a

$$w \in H^1_{0, \Gamma^D}(\Omega), \quad w \text{ dépend du choix du relèvement } R$$

- On remplace u par $w + R$ dans (F.V.), le relèvement étant donné, et on utilise la bilinéarité de \mathcal{A} :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } w \in H^1_{0, \Gamma^D}(\Omega) \text{ tel que} \\ \mathcal{A}(w, v) = \mathcal{L}(v) - \mathcal{A}(R, v), \forall v \in H^1_{0, \Gamma^D}(\Omega) \end{array} \right. \quad (\text{F.V.R.})$$

Soient $f \in L^2(\Omega)$, $g_R \in L^2(\Gamma^R)$, $g_D \in H^{1/2}(\Gamma^D)$ et $R \in H^1(\Omega)$ un relèvement de g_D ($\gamma_{\Gamma^D}(R) = g_D$) donné.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } w \in H^1_{0, \Gamma^D}(\Omega) \text{ tel que} \\ \mathcal{A}(w, v) = \mathcal{L}_R(v) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}(v) - \mathcal{A}(R, v), \forall v \in H^1_{0, \Gamma^D}(\Omega) \end{array} \right. \quad (\text{F.V.R.})$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(u, v) &\stackrel{\text{def}}{=} \eta \int_{\Omega} u \cdot v \, dq + \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle \, dq + \alpha \int_{\Gamma^R} u v \, d\sigma \\ \mathcal{L}(v) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega} f \cdot v \, dq + \int_{\Gamma^R} g_R v \, d\sigma \end{aligned}$$

Exo.

- 1 Sous certaines hypothèses sur η et α , et en utilisant le théorème de Lax-Milgram, montrer que (F.V.R.) admet une unique solution w_R .
- 2 En déduire que $u = w_R + R$ est l'unique solution de (F.V.).

☞ A faire à la maison

Si u solution de (F.V.) appartient à $H^1_{g_D, \Gamma^D}(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ alors u est solution de (1).

Exo.

- 1 On suppose $\Gamma^R = \emptyset$. Trouver la formulation variationnelle associée à (1), ...
- 2 On suppose $\Gamma^D = \emptyset$. Trouver la formulation variationnelle associée à (1), ...

☞ A faire à la maison