

Ingénieurs MACS 2 - TP F.E.M. (S8)

Eléments finis $\mathbb{P}_1$ -Lagrange en dimension ≥ 1 : épisode 6

B.V.P. : formulation variationnelle discrète

François Cuvelier

Laboratoire d'Analyse Géométrie et Applications
Institut Galilée
Université Paris XIII.

2022/03/31

F.E.M. : épisode 6

[1 / 20]

B.V.P. : formulation variationnelle discrète

2022/03/31

Bibliographie

- [Coh] A. Cohen.
Approximations variationnelles des EDP. Notes du Cours de M2.
Polycopié (<https://www.ljll.math.upmc.fr/~cohen/CohenM2.pdf>).
- [QV08] Alfio M. Quarteroni and Alberto Valli.
Numerical Approximation of Partial Differential Equations.
Springer Publishing Company, Incorporated, 1st ed. 1994. 2nd printing edition, 2008.

F.E.M. : épisode 6

[3 / 20]

B.V.P. : formulation variationnelle discrète

2022/03/31

Prérequis

- Cours de Mme Halpern,
- Les épisodes précédents

Objectif :

- Espaces fonctionnels discrets
- Passage de la formulation variationnelle à la formulation variationnelle discrète
- Passage de la formulation variationnelle discrète à la représentation matricielle

F.E.M. : épisode 6

[2 / 20]

B.V.P. : formulation variationnelle discrète

2022/03/31

$$(1) \begin{cases} \eta u - \Delta u = f, & \text{dans } \Omega & (1a) \\ u = g_D, & \text{sur } \Gamma^D & (1b) \\ \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = g_R, & \text{sur } \Gamma^R & (1c) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ un domaine borné, connexe de frontière,} \\ \partial\Omega, \mathcal{C}^1 \text{ par morceaux. } \partial\Omega = \Gamma^D \cup \Gamma^R, \text{ avec} \\ \Gamma^D \cap \Gamma^R = \emptyset. \end{array}$$

Résumé épisode 5: Soient $f \in L^2(\Omega)$, $g_R \in L^2(\Gamma^R)$, $g_D \in H^{1/2}(\Gamma^D)$, $\eta \geq 0$ et $\alpha \geq 0$.

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H_{g_D, \Gamma^D}^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \mathcal{A}(u, v) = \mathcal{L}(v), \quad \forall v \in H_{0, \Gamma^D}^1(\Omega) \end{cases} \quad (\text{F.V.})$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(u, v) &\stackrel{\text{def}}{=} \eta \int_{\Omega} u \cdot v \, dq + \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle \, dq + \alpha \int_{\Gamma^R} u v \, d\sigma \\ \mathcal{L}(v) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega} f \cdot v \, dq + \int_{\Gamma^R} g_R v \, d\sigma \end{aligned}$$

- **Théorème de Lax-Milgram** + relèvement $\Rightarrow$ (F.V.) admet une unique solution
- Si u solution de (F.V.) appartient à $H_{g_D, \Gamma^D}^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ alors u est solution de (1).

F.E.M. : épisode 6

[4 / 20]

B.V.P. : formulation variationnelle discrète

2022/03/31

Plan	épisode 1: rappels
1 Espaces fonctionnels discrets 2 Normes discrètes 3 Discrétisation de (F.V.) 4 Ecritures matricielles de (F.V.H)	Soit Ω_h un maillage de $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. on note $n_q = \Omega_h.n_q$, $q = \Omega_h.q$, $me = \Omega_h.me$, ... $\Omega_h = \bigcup_{k=1}^{n_{me}} K_k, \quad K_k \text{ } n\text{-simplexe}$ $V(\Omega_h)$, espace des éléments finis $\mathbb{P}_1$-Lagrange sur Ω_h : $V(\Omega_h) \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in C^0(\Omega_h; \mathbb{R}) \text{ tq } \forall k \in \llbracket 1, n_{me} \rrbracket, \quad v _{K_k} \in \mathbb{R}_1[X_1, \dots, X_n]\}$ $= \text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_{n_q})$ Les $\varphi_i \in V(\Omega_h)$ vérifient $\varphi_i(q^j) = \delta_{i,j}$, $\forall (i,j) \in \llbracket 1, n_q \rrbracket^2$ - Opérateur d'interpolation: $V(\Omega) = H^1(\Omega)$ $\begin{cases} \pi_h : H^1(\Omega) & \longrightarrow & V(\Omega_h) \\ w & \longmapsto & \pi_h(w) = \sum_{i=1}^{n_q} w(q^i) \varphi_i \end{cases}$
F.E.M.: épisode 6 [5 / 20] B.V.P. : formulation variationnelle discrète 1. Espaces fonctionnels discrets - Discrétisation de $H^1(\Omega)$ par $V(\Omega_h) = \text{Vect}(\{\varphi_i\}_{i=1}^{n_q})$ Soit $v \in H^1(\Omega)$, $\pi_h(v) = \sum_{i=1}^{n_q} v(q_i) \varphi_i \in V(\Omega_h)$ - Discrétisation de $H_{0,\Gamma^D}^1(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in H^1(\Omega) \text{ t.q. } \gamma_{\Gamma^D}(v) = 0\}$ On note $\mathcal{I}_D \subset \llbracket 1, n_q \rrbracket$ l'ensemble des indices des points de $\overline{\Gamma_h^D}$ et $\mathcal{I}_D^c = \llbracket 1, n_q \rrbracket \setminus \mathcal{I}_D$ $\forall i \in \mathcal{I}_D, q^i \in \overline{\Gamma_h^D} \text{ et } \forall i \in \mathcal{I}_D^c, q^i \notin \overline{\Gamma_h^D}.$ Soit $v \in H_{0,\Gamma^D}^1(\Omega)$, $\pi_h(v) = \sum_{i=1}^{n_q} v(q_i) \varphi_i = \sum_{i \in \mathcal{I}_D} \underset{=0}{v(q_i)} \varphi_i + \sum_{i \in \mathcal{I}_D^c} v(q_i) \varphi_i = \sum_{i \in \mathcal{I}_D^c} v(q_i) \varphi_i$ $H_{0,\Gamma^D}^1(\Omega) \approx V_{0,\Gamma_h^D}(\Omega_h) = \text{Vect}(\{\varphi_i\}_{i \in \mathcal{I}_D^c})$	F.E.M.: épisode 6 [6 / 20] B.V.P. : formulation variationnelle discrète 1. Espaces fonctionnels discrets - Discrétisation de $H^1(\Omega)$ par $V(\Omega_h) = \text{Vect}(\{\varphi_i\}_{i=1}^{n_q})$ Soit $v \in H^1(\Omega)$, $\pi_h(v) = \sum_{i=1}^{n_q} v(q_i) \varphi_i \in V(\Omega_h)$ - Discrétisation de $H_{g_D, \Gamma^D}^1(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in H^1(\Omega) \text{ t.q. } \gamma_{\Gamma^D}(v) = g_D\}$ On note $\mathcal{I}_D \subset \llbracket 1, n_q \rrbracket$ l'ensemble des indices des points de $\overline{\Gamma_h^D}$ et $\mathcal{I}_D^c = \llbracket 1, n_q \rrbracket \setminus \mathcal{I}_D$ $\forall i \in \mathcal{I}_D, q^i \in \overline{\Gamma_h^D} \text{ et } \forall i \in \mathcal{I}_D^c, q^i \notin \overline{\Gamma_h^D}.$ Soit $v \in H_{g_D, \Gamma^D}^1(\Omega)$, $\pi_h(v) = \sum_{i=1}^{n_q} v(q_i) \varphi_i = \sum_{i \in \mathcal{I}_D} v(q_i) \varphi_i + \sum_{i \in \mathcal{I}_D^c} v(q_i) \varphi_i = \sum_{i \in \mathcal{I}_D} g_D(q_i) \varphi_i + \sum_{i \in \mathcal{I}_D^c} v(q_i) \varphi_i$ $V_{g_D, \Gamma_h^D}(\Omega_h) \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V(\Omega_h) \text{ t.q. } v = \sum_{i \in \mathcal{I}_D} g_D(q_i) \varphi_i + \sum_{i \in \mathcal{I}_D^c} \mu_i \varphi_i, \quad \forall \mu_i \in \mathbb{R}\}$ $H_{g_D, \Gamma^D}^1(\Omega) \approx V_{g_D, \Gamma_h^D}(\Omega_h) \text{ pas un espace vectoriel!}$
F.E.M.: épisode 6 [7 / 20] B.V.P. : formulation variationnelle discrète 1. Espaces fonctionnels discrets	F.E.M.: épisode 6 [7 / 20] B.V.P. : formulation variationnelle discrète 1. Espaces fonctionnels discrets

Plan

- 1 Espaces fonctionnels discrets
- 2 Normes discrètes
- 3 Discrétisation de (F.V.)
- 4 Ecritures matricielles de (F.V.H)

Définition: [QV08], p.90

Une famille de triangulations (maillages) $\{\tau_h\}_{h>0}$, de Ω , est dite **régulière** si

$$\exists \sigma \geq 1 \text{ t.q. } \max_{K \in \tau_h} \frac{h_K}{\rho_K} \leq \sigma, \quad \forall h > 0. \tag{2}$$

où $h_K = \sup\{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|; (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in K^2\}$ et $\rho_K = \sup\{\text{diam}(B); B \text{ boule incluse dans } K\}$.
On note $h \stackrel{\text{def}}{=} \max_{K \in \tau_h} h_K$.

On note $|\cdot|_{m,\Omega}$ la semi-norme sur $H^m(\Omega)$:

$$|u|_{m,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} |D^\alpha u(\mathbf{q})|^2 d\mathbf{q} \right)^{1/2} \tag{3}$$

Si Ω est un domaine polygonal alors $V(\Omega_h) \subset H^1(\Omega)$.

Theorem: [QV08], p.90

Soient $\{\tau_h\}_{h>0}$, une famille de triangulations régulières de Ω , un domaine polygonal, et $u \in H^2(\Omega)$. Il existe $C_0 > 0$ et $C_1 > 0$, indépendants de $h \stackrel{\text{def}}{=} \max_{K \in \tau_h} h_K$, tels que

$$\begin{aligned} |u - \pi_h(u)|_{0,\Omega} &\leq C_0 h^2 |u|_{2,\Omega} \\ |u - \pi_h(u)|_{1,\Omega} &\leq C_1 h |u|_{2,\Omega} \end{aligned}$$

avec $\pi_h(u) = \sum_{i=1}^{n_q} u(\mathbf{q}^i) \varphi_i \in V(\Omega_h)$

Soit E_h un maillage élémentaire de type d-simplexes de $E \subset \mathbb{R}^n$ (objet **siMeshElt**). On note

$$\|u_h\|_{0,E_h} = \left(\int_{E_h} |u_h(\mathbf{q})|^2 d\mathbf{q} \right)^{1/2} = \|u_h\|_{0,E} \text{ si } E_h = E \text{ polygonal}$$

et si $d = n$

$$\|u_h\|_{1,E_h} = \left(\sum_{|\alpha| \leq 1} \int_{E_h} |D^\alpha u_h(\mathbf{q})|^2 d\mathbf{q} \right)^{1/2} = \|u_h\|_{1,E} \text{ si } E_h = E \text{ polygonal}$$

$$|u_h|_{1,E_h} = \left(\sum_{|\alpha|=1} \int_{E_h} |D^\alpha u_h(\mathbf{q})|^2 d\mathbf{q} \right)^{1/2} = |u_h|_{0,E} \text{ si } E_h = E \text{ polygonal}$$

Exo:

- 1 Ecrire la fonction Matlab/Octave, **normH0**, permettant de calculer $\|u_h\|_{0,E_h}$
- 2 Ecrire la fonction Matlab/Octave, **seminormH1**, permettant de calculer $|u_h|_{1,E_h}$.
- 3 Ecrire la fonction Matlab/Octave, **normH1**, permettant de calculer $\|u_h\|_{1,E_h}$.

Ces fonctions seront écrites dans le répertoire **+siMeshElt**

Plan

- 1 Espaces fonctionnels discrets
- 2 Normes discrètes
- 3 Discrétisation de (F.V.)
- 4 Ecritures matricielles de (F.V.H)

On a

$$\mathcal{A}_h(u_h, v_h) \stackrel{\text{def}}{=} \eta \int_{\Omega_h} u_h \cdot v_h d\mathbf{q} + \int_{\Omega_h} \langle \nabla u_h, \nabla v_h \rangle d\mathbf{q} + \alpha \int_{\Gamma_h^R} u_h v_h d\sigma$$
$$\mathcal{L}_h(v_h) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega_h} f \cdot v_h d\mathbf{q} + \int_{\Gamma_h^R} g_R v_h d\sigma$$

Exo:

- 1 Montrer que $\mathcal{A}_h : V(\Omega_h) \times V(\Omega_h) \longrightarrow \mathbb{R}$ est bilinéaire et que $\mathcal{L}_h : V(\Omega_h) \longrightarrow \mathbb{R}$ est linéaire.
- 2 Que peut-on dire si Ω est polygonal?

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H^1_{g_D, \Gamma^D}(\Omega) \text{ tel que} \\ \mathcal{A}(u, v) = \mathcal{L}(v), \forall v \in H^1_{0, \Gamma^D}(\Omega) \end{array} \right. \tag{F.V.}$$

avec

$$\mathcal{A}(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \eta \int_{\Omega} u \cdot v d\mathbf{q} + \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle d\mathbf{q} + \alpha \int_{\Gamma^R} u v d\sigma$$
$$\mathcal{L}(v) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega} f \cdot v d\mathbf{q} + \int_{\Gamma^R} g_R v d\sigma$$

On a alors la formulation variationnelle discrète appelée aussi **méthode de Galerkin**:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in V_{g_D, \Gamma_h^D}(\Omega_h) \text{ tel que} \\ \mathcal{A}_h(u_h, v_h) = \mathcal{L}_h(v_h), \forall v_h \in V_{0, \Gamma_h^D}(\Omega_h) \end{array} \right. \tag{F.V.H}$$

avec

$$\mathcal{A}_h(u_h, v_h) \stackrel{\text{def}}{=} \eta \int_{\Omega_h} u_h \cdot v_h d\mathbf{q} + \int_{\Omega_h} \langle \nabla u_h, \nabla v_h \rangle d\mathbf{q} + \alpha \int_{\Gamma_h^R} u_h v_h d\sigma$$
$$\mathcal{L}_h(v_h) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega_h} f \cdot v_h d\mathbf{q} + \int_{\Gamma_h^R} g_R v_h d\sigma$$

Si Ω polygonal, $\Omega_h = \Omega$.

Lemme: Lemme de Céa, (voir [QV08] p.174, [Coh] p.11)

Les hypothèses du théorème de Lax-Milgram étant vérifiées, la solution w de $(F.V.R)$ et la solution w_h de $(F.V.R.)_h$ vérifient

$$\|w - w_h\|_{1,\Omega} \leq \frac{M}{\nu} \inf_{v_h \in V_{0,\Gamma^D}(\Omega)} \|w - v_h\|_{1,\Omega}.$$

les constantes $M > 0$ et $\nu > 0$ étant respectivement celles de continuité et coercivité de $\mathcal{A}$.

Theorem: [QV08], p.90

Soient $\{\tau_h\}_{h>0}$, une famille de triangulations régulières de Ω , un domaine polygonal, et $u \in H^2(\Omega)$. Il existe $C_0 > 0$ et $C_1 > 0$, indépendants de $h \stackrel{\text{def}}{=} \max_{K \in \tau_h} h_K$, tels que

$$|u - \pi_h(u)|_{0,\Omega} \leq C_0 h^2 |u|_{2,\Omega}$$
$$|u - \pi_h(u)|_{1,\Omega} \leq C_1 h |u|_{2,\Omega}$$

$u \in H^2(\Omega)$ solution de (F.V.) et u_h solution de (F.V.H):

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} = \mathcal{O}(h) \text{ et } \|u - u_h\|_{0,\Omega} = \mathcal{O}(h^2) \quad (\text{admis})$$

Plan

- 1 Espaces fonctionnels discrets
- 2 Normes discrètes
- 3 Discrétisation de (F.V.)
- 4 Ecritures matricielles de (F.V.H)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in V_{g_D, \Gamma_h^D}(\Omega_h) \text{ tel que} \\ \mathcal{A}_h(u_h, v_h) = \mathcal{L}_h(v_h), \quad \forall v_h \in V_{0, \Gamma_h^D}(\Omega_h) \end{array} \right. \quad (\text{F.V.H})$$

- Etape 1: Montrons que
$$\mathcal{A}_h(u_h, v_h) = \mathcal{L}_h(v_h), \quad \forall v_h \in V_{0, \Gamma_h^D}(\Omega_h) \Leftrightarrow \mathcal{A}_h(u_h, \varphi_i) = \mathcal{L}_h(\varphi_i), \quad \forall i \in \mathcal{I}_D^c$$

$\Rightarrow$ trivial car $\varphi_i \in V_{0, \Gamma_h^D}(\Omega_h)$,

$\Leftarrow$

$$(\text{F.V.H}) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in V_{g_D, \Gamma_h^D}(\Omega_h) \text{ tel que} \\ \mathcal{A}_h(u_h, \varphi_i) = \mathcal{L}_h(\varphi_i), \quad \forall i \in \mathcal{I}_D^c \end{array} \right.$$

- Etape 2: De manière générale (sans prise en compte de la condition de Dirichlet)

$$u_h \in V(\Omega_h) \Leftrightarrow u_h = \sum_{j=1}^n u_j \varphi_j$$

et, par bilinéarité de $\mathcal{A}_h$, on a

$$\mathcal{A}_h(u_h, \varphi_i) = \mathcal{A}_h\left(\sum_{j=1}^n u_j \varphi_j, \varphi_i\right) = \sum_{j=1}^n \mathcal{A}_h(\varphi_j, \varphi_i) u_j$$

On note $\mathbb{A}^h \in \mathcal{M}_{n_q}(\mathbb{R})$, définie par $\mathbb{A}_{i,j}^h = \mathcal{A}_h(\varphi_j, \varphi_i)$ et $\mathbf{U} = (u_i)_{i=1}^{n_q} \in \mathbb{R}^{n_q}$.

$$\mathcal{A}_h(u_h, \varphi_i) = \mathbb{A}_{i,:}^h * \mathbf{U} \text{ où } \mathbb{A}_{i,:}^h: i\text{-ème ligne de } \mathbb{A}^h \text{ et } * \text{ produit matriciel}$$

$$(\text{F.V.H}) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in V_{g_D, \Gamma_h^D}(\Omega_h) \text{ tel que} \\ \mathcal{A}_h(u_h, \varphi_i) = \mathcal{L}_h(\varphi_i), \quad \forall i \in \mathcal{I}_D^c \end{array} \right.$$
$$u_h \in V_{g_D, \Gamma_h^D}(\Omega_h) \Leftrightarrow u_h = \sum_{j \in \mathcal{I}_D} g_D(q_j) \varphi_j + \sum_{j \in \mathcal{I}_D^c} u_j \varphi_j$$

Chercher u_h revient donc à déterminer les $(u_j)_{j \in \mathcal{I}_D^c}$.

$$\mathcal{A}_h(u_h, \varphi_i) = \sum_{j \in \mathcal{I}_D} \mathcal{A}_h(\varphi_j, \varphi_i) g_D(q_j) + \sum_{j \in \mathcal{I}_D^c} \mathcal{A}_h(\varphi_j, \varphi_i) u_j$$

- Méthode 1: inconnues en Dirichlet

$$(\text{F.V.H}) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u_i)_{i=1}^{n_q} \text{ tel que} \\ \sum_{j=1}^{n_q} \mathcal{A}_h(\varphi_j, \varphi_i) u_j = \mathcal{L}_h(\varphi_i), \quad \forall i \in \mathcal{I}_D^c \\ u_i = g_D(q^i), \quad \forall i \in \mathcal{I}_D \end{array} \right.$$
$$\Leftrightarrow (S_D) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n_q} \text{ tel que} \\ \mathbb{A}_{i,:}^h * \mathbf{U} = \mathcal{L}_h(\varphi_i), \quad \forall i \in \mathcal{I}_D^c \\ \mathbf{U}_i = g_D(q^i), \quad \forall i \in \mathcal{I}_D \end{array} \right.$$

(S_D) système linéaire de n_q équations à n_q inconnues. $\Leftarrow$ On perd la symétrie si $\mathbb{A}^h$ est symétrique!

$$(F.V.H) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_{g_D, \Gamma_h^D}(\Omega_h) \text{ tel que} \\ \mathcal{A}_h(u_h, \varphi_i) = \mathcal{L}_h(\varphi_i), \forall i \in \mathcal{I}_D^c \end{cases}$$

$$u_h \in V_{g_D, \Gamma_h^D}(\Omega_h) \Leftrightarrow u_h = \sum_{j \in \mathcal{I}_D} g_D(q^j) \varphi_j + \sum_{j \in \mathcal{I}_D^c} u_j \varphi_j = R_h + w_h$$

• **Méthode 2: relèvement**

$R_h = \sum_{j \in \mathcal{I}_D} g_D(q^j) \varphi_j$, relèvement/prolongement par 0 de g_D dans $V(\Omega_h)$

$$R \in \mathbb{R}^{n_q} \text{ t.q. } R_i = g_D(q^i), \forall i \in \mathcal{I}_D \text{ et } R_i = 0, \forall i \in \mathcal{I}_D^c$$

On note $U = (u_j)_{j=1}^{n_q} \in \mathbb{R}^{n_q}$; $U_{\mathcal{I}_D} = R_{\mathcal{I}_D}$.

Chercher u_h : déterminer les $N \stackrel{\text{def}}{=} n_q - \text{card } \mathcal{I}_D$ inconnues, $(u_j)_{j \in \mathcal{I}_D^c} = U_{\mathcal{I}_D^c}$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_h(u_h, \varphi_i) &= \mathcal{A}_h(R_h + w_h, \varphi_i) = \sum_{j \in \mathcal{I}_D} \mathcal{A}_h(\varphi_j, \varphi_i) g_D(q^j) + \sum_{j \in \mathcal{I}_D^c} \mathcal{A}_h(\varphi_j, \varphi_i) u_j \\ &= \mathbb{A}_{i, \mathcal{I}_D}^h * R_{\mathcal{I}_D} + \mathbb{A}_{i, \mathcal{I}_D^c}^h * U_{\mathcal{I}_D^c} \end{aligned}$$

$$(F.V.H) \Leftrightarrow (S_R) \begin{cases} \text{Trouver } U_{\mathcal{I}_D^c}, \text{ tel que} \\ \mathbb{A}_{i, \mathcal{I}_D^c}^h * U_{\mathcal{I}_D^c} = \mathcal{L}_h(\varphi_i) - \mathbb{A}_{i, \mathcal{I}_D}^h * R_{\mathcal{I}_D}, \forall i \in \mathcal{I}_D^c \end{cases}$$

(S_R) système linéaire de N équations à N inconnues. $\Leftrightarrow$ On conserve la symétrie si $\mathbb{A}^h$ est symétrique!