

Ingénieurs MACS 2 - TP F.E.M. (S8)

Éléments finis $\mathbb{P}_1$ -Lagrange en dimension ≥ 1 : épisode 7

B.V.P. : implémentation

François Cuvelier

Laboratoire d'Analyse Géométrie et Applications
Institut Galilée
Université Paris XIII.

2022/03/31

F.E.M. : épisode 7	[1 / 31]	B.V.P. : implémentation	2022/03/31
(1)	$\eta u - \Delta u = f,$	dans Ω (1a)	$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine borné, connexe de frontière,
	$u = g_D,$	sur Γ^D (1b)	$\partial\Omega, \mathcal{C}^1$ par morceaux. $\partial\Omega = \Gamma^D \cup \Gamma^R$, avec
	$\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = g_R,$	sur Γ^R (1c)	$\Gamma^D \cap \Gamma^R = \emptyset.$

Résumé épisode 5: formulation variationnelle

Soient $f \in L^2(\Omega)$, $g_R \in L^2(\Gamma^R)$, $g_D \in H^{1/2}(\Gamma^D)$, $\eta \geq 0$ et $\alpha \geq 0$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_{g_D, \Gamma^D}^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \mathcal{A}(u, v) = \mathcal{L}(v), \forall v \in H_{0, \Gamma^D}^1(\Omega) \end{array} \right. \quad (\text{F.V.})$$

avec

$$\mathcal{A}(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \eta \int_{\Omega} u \cdot v \, d\mathbf{q} + \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle \, d\mathbf{q} + \alpha \int_{\Gamma^R} u v \, d\sigma$$

$$\mathcal{L}(v) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega} f \cdot v \, d\mathbf{q} + \int_{\Gamma^R} g_R v \, d\sigma$$

Prérequis

- Cours de Mme Halpern,
- Les épisodes précédents

Objectif : Mise en oeuvre des éléments finis $\mathbb{P}_1$ -Lagrange

- Utilisation de tous les outils/fonctions développés,
- Importance de la validation des codes,
- Matlab/Octave, passage de fonctions en paramètre avec nombre variable d'arguments en sortie,

F.E.M. : épisode 7	[2 / 31]	B.V.P. : implémentation	2022/03/31
(1)	$\eta u - \Delta u = f,$	dans Ω (1a)	$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine borné, connexe de frontière,
	$u = g_D,$	sur Γ^D (1b)	$\partial\Omega, \mathcal{C}^1$ par morceaux. $\partial\Omega = \Gamma^D \cup \Gamma^R$, avec
	$\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = g_R,$	sur Γ^R (1c)	$\Gamma^D \cap \Gamma^R = \emptyset.$

Résumé épisode 6: formulation variationnelle discrète

$$V(\Omega_h) \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in \mathcal{C}^0(\Omega_h; \mathbb{R}) \text{ tq } \forall k \in \llbracket 1, n_{\text{me}} \rrbracket, v|_{K_k} \in \mathbb{R}_1[X_1, \dots, X_n]\} = \text{Vect}\{\varphi_1, \dots, \varphi_{n_d}\}$$

$$V_{g_D, \Gamma_h^D}(\Omega_h) \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V(\Omega_h) \text{ t.q. } v = \sum_{i \in \mathcal{I}_D} g_D(q_i) \varphi_i + \sum_{i \in \mathcal{I}_0} \mu_i \varphi_i, \forall \mu_i \in \mathbb{R}\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in V_{g_D, \Gamma_h^D}(\Omega_h) \text{ tel que} \\ \mathcal{A}_h(u_h, v_h) = \mathcal{L}_h(v_h), \forall v_h \in V_{0, \Gamma_h^D}(\Omega_h) \end{array} \right. \quad (\text{F.V.H})$$

avec

$$\mathcal{A}_h(u_h, v_h) \stackrel{\text{def}}{=} \eta \int_{\Omega_h} u_h \cdot v_h \, d\mathbf{q} + \int_{\Omega_h} \langle \nabla u_h, \nabla v_h \rangle \, d\mathbf{q} + \alpha \int_{\Gamma_h^R} u_h v_h \, d\sigma$$

$$\mathcal{L}_h(v_h) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega_h} f \cdot v_h \, d\mathbf{q} + \int_{\Gamma_h^R} g_R v_h \, d\sigma$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in V_{g_D, \Gamma_h^D}(\Omega_h) \text{ tel que} \\ \mathcal{A}_h(u_h, v_h) = \mathcal{L}_h(v_h), \forall v_h \in V_{0, \Gamma_h^D}(\Omega_h) \end{array} \right. \quad (\text{F.V.H})$$

Résumé épisode 6: écriture matricielle

$$(\text{F.V.H}) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in V_{g_D, \Gamma_h^D}(\Omega_h) \text{ tel que} \\ \mathcal{A}_h(u_h, \varphi_i) = \mathcal{L}_h(\varphi_i), \forall i \in \mathcal{I}_D^c \end{array} \right.$$

On note $\mathbb{A}^h \in \mathcal{M}_{n_q}(\mathbb{R})$, définie par $\mathbb{A}_{i,j}^h = \mathcal{A}_h(\varphi_j, \varphi_i)$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n_q}$, $\mathbf{b}_i = \mathcal{L}_h(\varphi_i)$ et $\mathbf{U} = (u_j)_{j=1}^{n_q} \in \mathbb{R}^{n_q}$, $u_h = \sum_{j=1}^{n_q} u_j \varphi_j$.
 $\mathcal{I}_D \subset \llbracket 1, n_q \rrbracket$ indices Dirichlet et

$$\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n_q} \text{ t.q. } \mathbf{R}_i = g_D(q^i), \forall i \in \mathcal{I}_D \text{ et } \mathbf{R}_i = 0, \forall i \in \mathcal{I}_D^c$$

méthode 1 (inconnues Dirichlet) $(S_D) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n_q} \text{ tel que} \\ \mathbb{A}_{i,:}^h * \mathbf{U} = \mathbf{b}_i, \forall i \in \mathcal{I}_D^c \\ \mathbf{U}_i = \mathbf{R}_i, \forall i \in \mathcal{I}_D \end{array} \right.$	méthode 2 (relèvement de g_D) $(S_R) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{U}_{\mathcal{I}_D^c}, \text{ tel que} \\ \mathbb{A}_{i, \mathcal{I}_D^c}^h * \mathbf{U}_{\mathcal{I}_D^c} = \mathbf{b}_i - \mathbb{A}_{i, \mathcal{I}_D}^h * \mathbf{R}_{\mathcal{I}_D}, \forall i \in \mathcal{I}_D^c \end{array} \right.$
---	--

Soient $\mathbb{A}^h \in \mathcal{M}_{n_q}(\mathbb{R})$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n_q}$, $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n_q}$ et $\mathcal{I}_D \subset \llbracket 1, n_q \rrbracket$ donnés.

On cherche $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n_q}$ (i.e. $u_h = \sum_{j=1}^{n_q} u_j \varphi_j$).

méthode 1 (inconnues Dirichlet)

$$(S_D) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n_q} \text{ tel que} \\ \mathbb{A}_{i,:}^h * \mathbf{U} = \mathbf{b}_i, \forall i \in \mathcal{I}_D^c \\ \mathbf{U}_i = \mathbf{R}_i, \forall i \in \mathcal{I}_D \end{array} \right.$$

méthode 2 (relèvement de g_D)

$$(S_R) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{U}_{\mathcal{I}_D^c}, \text{ tel que} \\ \mathbb{A}_{i, \mathcal{I}_D^c}^h * \mathbf{U}_{\mathcal{I}_D^c} = \mathbf{b}_i - \mathbb{A}_{i, \mathcal{I}_D}^h * \mathbf{R}_{\mathcal{I}_D}, \forall i \in \mathcal{I}_D^c \end{array} \right.$$

avec $\mathbf{U}_{\mathcal{I}_D} = \mathbf{R}_{\mathcal{I}_D}$.

Exo: Ecrire une fonction `FEM.solveBVPsystem` retournant $\mathbf{U}$ par l'une des deux méthodes (choix de la méthode passé en paramètre)

Résolution de système linéaire creux avec Matlab/Octave: $\mathbf{U} = \mathbf{A} \backslash \mathbf{b}$; (fonction `mldivide`)

De nombreuses autres fonctions existent : `pcg`, `bicg`, `bicgstab`, `gmres`, `minres`, ...

☞ `FEM.solveBVPsystemV2` permet de choisir la fonction pour résoudre le système linéaire et de récupérer plusieurs arguments en sortie... voir [ep07.P3V2](#).

F.E.M.: épisode 7	[5 / 31]	B.V.P. : implémentation	2022/03/31	F.E.M.: épisode 7	[6 / 31]	B.V.P. : implémentation	2022/03/31
-------------------	----------	-------------------------	------------	-------------------	----------	-------------------------	------------

Plan

- 1 Calcul de $\mathbb{A}^h$
- 2 Calcul de $\mathbf{b}$
- 3 Validations
- 4 Applications

$\mathbb{A}^h \in \mathcal{M}_{n_q}(\mathbb{R})$, définie par $\mathbb{A}_{i,j}^h = \mathcal{A}_h(\varphi_j, \varphi_i)$ avec

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_h(\varphi_j, \varphi_i) &\stackrel{\text{def}}{=} \eta \int_{\Omega_h} \varphi_j \cdot \varphi_i d\mathbf{q} + \int_{\Omega_h} \langle \nabla \varphi_j, \nabla \varphi_i \rangle d\mathbf{q} + \alpha \int_{\Gamma_h^R} \varphi_j \varphi_i d\sigma \\ &= \eta \mathbb{M}_{i,j}(\Omega_h) + \mathbb{K}_{i,j}(\Omega_h) + \alpha \mathbb{M}_{i,j}^G(\Gamma_h^R) \end{aligned}$$

où $\mathbb{M}(\Omega_h)$ et $\mathbb{K}(\Omega_h)$ sont resp. les matrices de **Masse** et de **Rigidité** sur Ω_h , et $\mathbb{M}^G(\Gamma_h^R) \in \mathcal{M}_{n_q}(\mathbb{R})$ matrice de Masse sur Γ_h^R en numérotation globale.

☞ voir épisodes 3 et 4

$$\mathbb{A}^h = \eta \mathbb{M}(\Omega_h) + \mathbb{K}(\Omega_h) + \alpha \mathbb{M}^G(\Gamma_h^R) \quad (3)$$

avec

$$\mathbb{M}^G(\Gamma_h^R) = \sum_{l \in R_{\text{labs}}} \mathbb{M}^G(\Gamma_l^h)$$

F.E.M.: épisode 7	[7 / 31]	B.V.P. : implémentation	1. Calcul de $\mathbb{A}^h$	F.E.M.: épisode 7	[8 / 31]	B.V.P. : implémentation	1. Calcul de $\mathbb{A}^h$
-------------------	----------	-------------------------	-----------------------------	-------------------	----------	-------------------------	-----------------------------

Plan

- 1 Calcul de $\mathbb{A}^h$
- 2 Calcul de $\mathbf{b}$
- 3 Validations
- 4 Applications

$\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n_q}$, définie par $\mathbf{b}_i = \mathcal{L}_h(\varphi_i)$ avec

$$\mathcal{L}_h(\varphi_i) = \int_{\Omega_h} f \cdot \varphi_i d\mathbf{q} + \int_{\Gamma_h^R} g_R \varphi_i d\sigma$$

- Si f est **continue** sur Ω_h , on approche f par $\pi_h(f) = \sum_{j=1}^{n_q} f(\mathbf{q}^j) \varphi_j \in V(\Omega_h)$.

On note $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{n_q}$, $\mathbf{F}_j = f(\mathbf{q}^j)$, $\forall j \in \llbracket 1, n_q \rrbracket$.

$$\int_{\Omega_h} f \cdot \varphi_i d\mathbf{q} \approx \langle \mathbb{M}(\Omega_h) * \mathbf{F}, \mathbf{e}^i \rangle$$

où $\mathbf{e}^i$, i -ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^{n_q}$ et $\mathbb{M}(\Omega_h)$, matrice de Masse de Ω_h .

$\times$ peut-être un peu trop restrictif!

$\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n_q}$, définie par $\mathbf{b}_i = \mathcal{L}_h(\varphi_i)$ avec

$$\mathcal{L}_h(\varphi_i) = \int_{\Omega_h} f \cdot \varphi_i d\mathbf{q} + \int_{\Gamma_h^R} g_R \varphi_i d\sigma$$

- Si g_R est **continue** sur Γ_h^R , construit un relèvement discret de g_R ,

$$\mathbf{g}_h^R = \sum_{j \in \mathcal{I}_R} g_R(\mathbf{q}^j) \varphi_j \in V(\Omega_h)$$

où $\mathcal{I}_R \subset \llbracket 1, n_q \rrbracket$ est l'ensemble des indices des points du bord Γ_h^R .
On note $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n_q}$, t.q. $\mathbf{G}_j = g_R(\mathbf{q}^j)$, $\forall j \in \mathcal{I}_R$ et $\mathbf{G}_i = 0$, sinon.

$$\int_{\Gamma_h^R} g_R \varphi_i d\sigma \approx \langle \mathbb{M}^G(\Gamma_h^R) * \mathbf{F}, \mathbf{e}^i \rangle$$

où $\mathbb{M}^G(\Gamma_h^R) \in \mathcal{M}_{n_q}(\mathbb{R})$ matrice de Masse sur Γ_h^R en numérotation globale et $\mathbf{e}^i$, i -ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^{n_q}$.

$\times$ souvent trop restrictif!

$\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n_q}$, définie par $\mathbf{b}_i = \mathcal{L}_h(\varphi_i)$ avec

$$\mathcal{L}_h(\varphi_i) = \int_{\Omega_h} f \cdot \varphi_i d\mathbf{q} + \int_{\Gamma_h^R} g_R \varphi_i d\sigma$$

- Si f n'est **pas continue** sur Ω_h . En supposant
 - ▶ $\Omega_h = \bigcup_{l \in \text{labs}} \Omega_l^h$ où les Ω_l^h sont des maillages élémentaires de Ω_h (n -simplexes)
 - ▶ f est continue sur Ω_l^h , $\forall l \in \text{labs}$.

$$\int_{\Omega_h} f \cdot \varphi_i d\mathbf{q} = \sum_{l \in \text{labs}} \int_{\Omega_l^h} f \cdot \varphi_i d\mathbf{q}$$

On note $\mathbf{F}' \in \mathbb{R}^{n_q}$, $\mathbf{F}'_j = f(\mathbf{q}^j)$, si $\mathbf{q}^j \in \overline{\Omega_l^h}$ (i.e. $j \in \Omega_l^h.toGlobal$) et $\mathbf{F}'_j = 0$, sinon.

$$\int_{\Omega_h} f \cdot \varphi_i d\mathbf{q} \approx \sum_{l \in \text{labs}} \langle \mathbb{M}^G(\Omega_l^h) * \mathbf{F}', \mathbf{e}^i \rangle = \left\langle \sum_{l \in \text{labs}} \mathbb{M}^G(\Omega_l^h) * \mathbf{F}', \mathbf{e}^i \right\rangle$$

où $\mathbb{M}^G(\Omega_l^h) \in \mathcal{M}_{n_q}(\mathbb{R})$ matrice de Masse sur Ω_l^h en numérotation globale.

$\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n_q}$, définie par $\mathbf{b}_i = \mathcal{L}_h(\varphi_i)$ avec

$$\mathcal{L}_h(\varphi_i) = \int_{\Omega_h} f \cdot \varphi_i d\mathbf{q} + \int_{\Gamma_h^R} g_R \varphi_i d\sigma$$

- Si g_R n'est **pas continue** sur Γ_h^R . En supposant
 - $\Gamma_h^R = \bigcup_{l \in Rlabs} \Gamma_l^h$ où les Γ_l^h sont des maillages élémentaires de Ω_h ($(n-1)$ -simplexes).
 - g_R est continue sur Γ_l^h , $\forall l \in Rlabs$.

$$\int_{\Gamma_h^R} g_R \cdot \varphi_i d\mathbf{q} = \sum_{l \in Rlabs} \int_{\Gamma_l^h} g_R \cdot \varphi_i d\mathbf{q}$$

On note $\mathbf{G}^l \in \mathbb{R}^{n_q}$, $\mathbf{G}_j^l = g_R(\mathbf{q}^j)$, si $\mathbf{q}^j \in \overline{\Gamma_l^h}$ (i.e. $j \in \Gamma_l^h.toGlobal$) et $\mathbf{G}_j^l = 0$, sinon.

$$\int_{\Gamma_h^R} g_R \cdot \varphi_i d\mathbf{q} \approx \sum_{l \in Rlabs} \langle \mathbb{M}^G(\Gamma_l^h) * \mathbf{G}^l, \mathbf{e}^i \rangle = \left\langle \sum_{l \in Rlabs} \mathbb{M}^G(\Gamma_l^h) * \mathbf{G}^l, \mathbf{e}^i \right\rangle$$

où $\mathbb{M}^G(\Gamma_l^h) \in \mathcal{M}_{n_q}(\mathbb{R})$ matrice de Masse sur Γ_l^h en numérotation globale.

$$\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n_q}, \quad \mathbf{b}_i = \int_{\Omega_h} f \cdot \varphi_i d\mathbf{q} + \int_{\Gamma_h^R} g_R \varphi_i d\sigma$$

En résumé, pour le calcul du second membre:

- $\Omega_h = \bigcup_{l \in labs} \Omega_l^h$ où les Ω_l^h sont des maillages élémentaires de Ω_h (n -simplexes),
- f est continue sur Ω_l^h , $\forall l \in labs$, et, on note

$$\mathbf{F}^l \in \mathbb{R}^{n_q}, \quad \mathbf{F}_j^l = f(\mathbf{q}^j), \text{ si } \mathbf{q}^j \in \overline{\Omega_l^h} \text{ (i.e. } j \in \Omega_l^h.toGlobal \text{) et } \mathbf{F}_j^l = 0, \text{ sinon.}$$

- $\Gamma_h^R = \bigcup_{l \in Rlabs} \Gamma_l^h$ où les Γ_l^h sont des maillages élémentaires de Ω_h ($(n-1)$ -simplexes),
- g_R est continue sur Γ_l^h , $\forall l \in Rlabs$, et on note $\mathbf{G}^l \in \mathbb{R}^{n_q}$,

$$\mathbf{G}_j^l = g_R(\mathbf{q}^j), \text{ si } \mathbf{q}^j \in \overline{\Gamma_l^h} \text{ (i.e. } j \in \Gamma_l^h.toGlobal \text{) et } \mathbf{G}_j^l = 0, \text{ sinon.}$$

$$\mathbf{b} \approx \sum_{l \in labs} \mathbb{M}^G(\Omega_l^h) * \mathbf{F}^l + \sum_{l \in Rlabs} \mathbb{M}^G(\Gamma_l^h) * \mathbf{G}^l \quad (4)$$

Algorithme générique

$$(1) \begin{cases} \eta u - \Delta u = f, & \text{dans } \Omega & (1a) \\ u = g_D, & \text{sur } \Gamma^D & (1b) \\ \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = g_R, & \text{sur } \Gamma^R & (1c) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ un domaine borné, connexe de} \\ \text{frontière, } \partial\Omega, \mathcal{C}^1 \text{ par morceaux.} \\ \partial\Omega = \Gamma^D \cup \Gamma^R, \text{ avec } \overset{\circ}{\Gamma}^D \cap \overset{\circ}{\Gamma}^R = \emptyset. \end{array}$$

- Calcul de $\mathbb{A}_h$

$$\mathbb{A}_h = \eta \mathbb{M}(\Omega_h) + \mathbb{K}(\Omega_h) + \alpha \mathbb{M}^G(\Gamma_h^R) \quad (3)$$

avec $\mathbb{M}^G(\Gamma_h^R) = \sum_{l \in Rlabs} \mathbb{M}^G(\Gamma_l^h)$.

- Calcul de $\mathbf{b}$

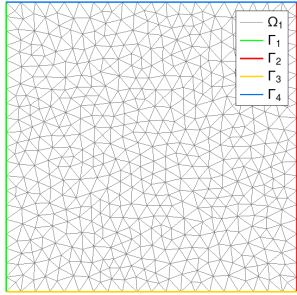
$$\mathbf{b} \approx \sum_{l \in labs} \mathbb{M}^G(\Omega_l^h) * \mathbf{F}^l + \sum_{l \in Rlabs} \mathbb{M}^G(\Gamma_l^h) * \mathbf{G}^l \quad (4)$$

- Prise en compte des C.L. de Dirichlet: méthode 1 ou 2

Utilisation de [FEM.solveBVPsystem](#)

Plan

- 1 Calcul de $\mathbb{A}_h$
- 2 Calcul de $\mathbf{b}$
- 3 Validations
- 4 Applications

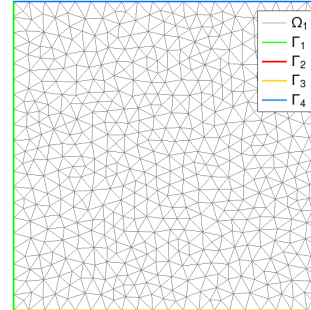


Validations progressives. avec solution exacte

- 1 $\eta = 0, \Gamma^R = \emptyset, \text{Dirichlet}$
- 2 $\eta > 0, \Gamma^R = \emptyset, \text{Dirichlet}$
- 3 $\eta > 0, \Gamma^D = \emptyset, \alpha = 0, \text{Neumann}$
- 4 $\eta = 0, \Gamma^D = \emptyset, \alpha > 0, \text{Robin}$
- 5 $\eta > 0, \Gamma^D = \emptyset, \alpha > 0, \text{Robin}$
- 6 $\eta = 0, \Gamma^D \neq \emptyset, \Gamma^R \neq \emptyset, \alpha = 0,$
- 7 $\eta > 0, \Gamma^D \neq \emptyset, \Gamma^R \neq \emptyset, \alpha = 0,$
- 8 $\eta = 0, \Gamma^D \neq \emptyset, \Gamma^R \neq \emptyset, \alpha > 0,$
- 9 $\eta > 0, \Gamma^D \neq \emptyset, \Gamma^R \neq \emptyset, \alpha > 0,$
- 10 ...

$$(1) \begin{cases} \eta u - \Delta u = f, & \text{dans } \Omega & (1a) \\ u = g_D, & \text{sur } \Gamma^D & (1b) \\ \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = g_R, & \text{sur } \Gamma^R & (1c) \end{cases}$$

• Validation 1: $\eta = 0, \Gamma^R = \emptyset$.



$$(1) \begin{cases} \eta u - \Delta u = f, & \text{dans } \Omega & (1a) \\ u = g_D, & \text{sur } \Gamma^D & (1b) \\ \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = g_R, & \text{sur } \Gamma^R & (1c) \end{cases}$$

$$\Gamma^D = \bigcup_{l \in [1,4]} \Gamma_l \text{ et } \Omega = \Omega_1$$

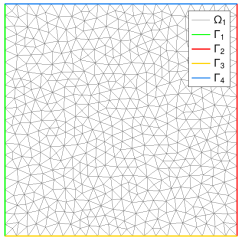
$$(P_1) \begin{cases} -\Delta u = f, & \text{dans } \Omega & (P_1.1) \\ u = g_D, & \text{sur } \Gamma^D & (P_1.2) \end{cases}$$

$$f \in L^2(\Omega), g_D \in H^{1/2}(\Gamma^D),$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_{g_D, \Gamma^D}^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \mathcal{A}(u, v) = \mathcal{L}(v), \forall v \in H_{0, \Gamma^D}^1(\Omega) \end{array} \right. \quad (FV_1)$$

$$\text{avec } \mathcal{A}(u, v) = \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle dq \text{ et } \mathcal{L}(v) = \int_{\Omega} f \cdot v dq \quad \text{Relèvement + Lax-Milgram} \Rightarrow \text{OK}$$

• Validation 1: $\eta = 0, \Gamma^R = \emptyset$.



$$(P_1) \begin{cases} -\Delta u = f, & \text{dans } \Omega = \Omega_1 & (P_1.1) \\ u = g_D, & \text{sur } \Gamma^D = \bigcup_{l \in [1,4]} \Gamma_l & (P_1.2) \end{cases}$$

$$(F.V.H) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in V_{g_D, \Gamma^D}^h(\Omega_h) \text{ tel que} \\ \mathcal{A}_h(u_h, \varphi_i) = \mathcal{L}_h(\varphi_i), \forall i \in \mathcal{I}_D^c \end{array} \right.$$

$$\text{avec } \mathcal{A}_h(u, v) = \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle dq \text{ et } \mathcal{L}_h(v) = \int_{\Omega} f \cdot v dq$$

- Calcul de $\mathbb{A}^h \in \mathcal{M}_{n_q}(\mathbb{R})$, t.q. $\mathbb{A}_{i,j}^h = \mathcal{A}_h(\varphi_j, \varphi_i)$

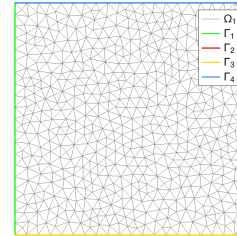
$$(3) \quad \mathbb{A}^h = \eta \mathbb{M}(\Omega_h) + \mathbb{K}(\Omega_h) + \alpha \mathbb{M}^G(\Gamma_h^R) \Rightarrow \mathbb{A}^h = \mathbb{K}(\Omega_h)$$

- Calcul de $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n_q}$, t.q. $\mathbf{b}_i = \mathcal{L}_h(\varphi_i)$

$$(4) \quad \mathbf{b} \approx \sum_{l \in \text{labs}} \mathbb{M}^G(\Omega_l^h) * \mathbf{F}^l + \sum_{l \in R \text{ labs}} \mathbb{M}^G(\Gamma_l^h) * \mathbf{G}^l \Rightarrow \mathbf{b} = \mathbb{M}(\Omega_h) * \mathbf{F}$$

avec $\mathbb{K}(\Omega_h)$ matrice de Rigidité, $\mathbb{M}(\Omega_h)$ matrice de Masse, $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{n_q}$ t.q. $\mathbf{F}_i = f(\mathbf{q}^i)$

• Validation 1: $\eta = 0, \Gamma^R = \emptyset$.



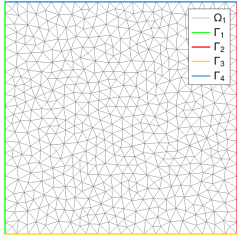
$$(P_1) \begin{cases} -\Delta u = f, & \text{dans } \Omega = \Omega_1 & (P_1.1) \\ u = g_D, & \text{sur } \Gamma^D = \bigcup_{l \in [1,4]} \Gamma_l & (P_1.2) \end{cases}$$

On choisit la solution exacte $u(x, y) = \cos(\pi(x - y))$, ce qui impose $f(x, y) = 2\pi^2 \cos(\pi(x - y))$ et $g_D(x, y) = \cos(\pi(x - y))$

Exo: Etudier les codes suivants

- programme [ep07.P1](#) résolvant (P_1) .
- programme [ep07.ordreP1](#) permettant de représenter l'ordre de la méthode des éléments finis $\mathbb{P}_1$ -Lagrange. Utilisez la fonction [ep07.solveP1...](#)

• Validation 2: $\eta > 0, \Gamma^R = \emptyset$.



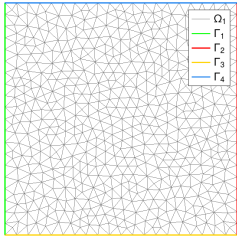
$$(P_2) \begin{cases} \eta u - \Delta u = f, & \text{dans } \Omega = \Omega_1 \quad (P_{2.1}) \\ u = g_D, & \text{sur } \Gamma^D = \bigcup_{l \in \llbracket 1,4 \rrbracket} \Gamma_l \quad (P_{2.2}) \end{cases}$$

On choisit la solution exacte $u(x, y) = \cos(\pi(x - y))$ et $\eta = 1/2$ ce qui impose
 $f(x, y) = 2\pi^2 \cos(\pi(x - y)) + \eta u(x, y)$ et
 $g_D(x, y) = \cos(\pi(x - y))$

Exo: Ecrire les codes suivants

- 1 programme [ep07.P2](#) résolvant (P_2)
- 2 programme [ep07.ordreP2](#) permettant de représenter l'ordre de la méthode des éléments finis $\mathbb{P}_1$ -Lagrange.

• Validation 3: $\eta > 0, \Gamma^D = \emptyset, \alpha = 0$.



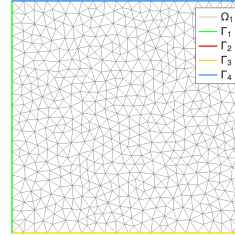
$$(P_3) \begin{cases} \eta u - \Delta u = f, & \text{dans } \Omega = \Omega_1 \quad (P_{3.1}) \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g_R, & \text{sur } \Gamma^R = \bigcup_{l \in \llbracket 1,4 \rrbracket} \Gamma_l \quad (P_{3.2}) \end{cases}$$

On choisit la solution exacte $u(x, y) = \cos(\pi(x - y))$ et $\eta = 1/2$ ce qui impose
 $f(x, y) = 2\pi^2 \cos(\pi(x - y)) + \eta u(x, y)$ et ...

Exo: Ecrire les codes suivants

- 1 programme [ep07.P3](#) résolvant (P_3)
- 2 programme [ep07.ordreP3](#) permettant de représenter l'ordre de la méthode des éléments finis $\mathbb{P}_1$ -Lagrange.

• Validation 3: $\eta > 0, \Gamma^D = \emptyset, \alpha = 0$.



$$(P_3) \begin{cases} \eta u - \Delta u = f, & \text{dans } \Omega = \Omega_1 \quad (P_{3.1}) \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g_R, & \text{sur } \Gamma^R = \bigcup_{l \in \llbracket 1,4 \rrbracket} \Gamma_l \quad (P_{3.2}) \end{cases}$$

$$(F.V.H) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V(\Omega_h) \text{ tel que} \\ \mathcal{A}_h(u_h, \varphi_i) = \mathcal{L}_h(\varphi_i), \quad \forall i \in \llbracket 1, n_q \rrbracket \end{cases}$$

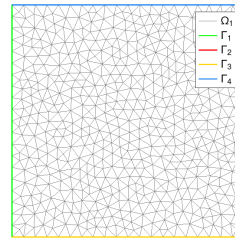
$$\text{avec } \mathcal{A}_h(u, v) = \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle d\mathbf{q} + \eta \int_{\Omega} u \cdot v d\mathbf{q} \text{ et}$$

$$\mathcal{L}_h(v) = \int_{\Omega} f \cdot v d\mathbf{q} + \int_{\Gamma_h^R} g_R \cdot v d\sigma$$

- Calcul de $\mathbb{A}^h \in \mathcal{M}_{n_q}(\mathbb{R})$, t.q. $\mathbb{A}_{i,j}^h = \mathcal{A}_h(\varphi_j, \varphi_i)$
 $(3) \quad \mathbb{A}^h = \eta \mathbb{M}(\Omega_h) + \mathbb{K}(\Omega_h) + \alpha \sum_{l \in Rlabs} \mathbb{M}^G(\Gamma_l^h) \Rightarrow \mathbb{A}^h = \eta \mathbb{M}(\Omega_h) + \mathbb{K}(\Omega_h)$

- Calcul de $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n_q}$, t.q. $\mathbf{b}_i = \mathcal{L}_h(\varphi_i)$
 $(4) \quad \mathbf{b} \approx \sum_{l \in labs} \mathbb{M}^G(\Omega_l^h) * \mathbf{F}^l + \sum_{l \in Rlabs} \mathbb{M}^G(\Gamma_l^h) * \mathbf{G}^l \Rightarrow \mathbf{b} = \mathbb{M}(\Omega_h) * \mathbf{F} + \sum_{l \in 1:4} \mathbb{M}^G(\Gamma_l^h) * \mathbf{G}^l$

• Validation 5: $\eta > 0, \Gamma^D = \emptyset, \alpha > 0$.



$$(P_5) \begin{cases} \eta u - \Delta u = f, & \text{dans } \Omega = \Omega_1 \quad (P_{5.1}) \\ \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = g_R, & \text{sur } \Gamma^R = \bigcup_{l \in \llbracket 1,4 \rrbracket} \Gamma_l \quad (P_{5.2}) \end{cases}$$

$$(F.V.H) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V(\Omega_h) \text{ tel que} \\ \mathcal{A}_h(u_h, \varphi_i) = \mathcal{L}_h(\varphi_i), \quad \forall i \in \llbracket 1, n_q \rrbracket \end{cases}$$

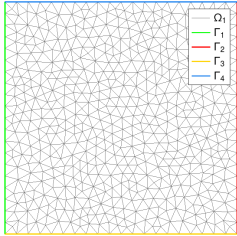
$$\mathcal{A}_h(u, v) = \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle d\mathbf{q} + \eta \int_{\Omega} u \cdot v d\mathbf{q} + \alpha \int_{\Gamma_h^R} u_h v_h d\sigma$$

$$\text{et } \mathcal{L}_h(v) = \int_{\Omega} f \cdot v d\mathbf{q} + \int_{\Gamma_h^R} g_R \cdot v d\sigma$$

- Calcul de $\mathbb{A}^h \in \mathcal{M}_{n_q}(\mathbb{R})$, t.q. $\mathbb{A}_{i,j}^h = \mathcal{A}_h(\varphi_j, \varphi_i)$
 $(3) \Rightarrow \mathbb{A}^h = \eta \mathbb{M}(\Omega_h) + \mathbb{K}(\Omega_h) + \alpha \sum_{l \in 1:4} \mathbb{M}^G(\Gamma_l^h)$

- Calcul de $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n_q}$, t.q. $\mathbf{b}_i = \mathcal{L}_h(\varphi_i)$
 $(4) \Rightarrow \mathbf{b} \approx \mathbb{M}(\Omega_h) * \mathbf{F} + \sum_{l \in 1:4} \mathbb{M}^G(\Gamma_l^h) * \mathbf{G}^l$

• Validation 5: $\eta > 0, \Gamma^D = \emptyset, \alpha > 0$.



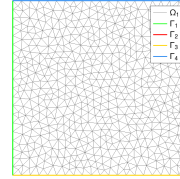
$$(P_5) \begin{cases} \eta u - \Delta u = f, & \text{dans } \Omega = \Omega_1 & (P_{5.1}) \\ \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = g_R, & \text{sur } \Gamma^R = \bigcup_{l \in [1,4]} \Gamma_l & (P_{5.2}) \end{cases}$$

On choisit la solution exacte $u(x, y) = \cos(\pi(x - y))$,
 $\eta = 1/2$, $\alpha = 1/3$ ce qui impose
 $f(x, y) = 2\pi^2 \cos(\pi(x - y)) + \eta u(x, y)$ et ...

Exo: Ecrire les codes suivants

- 1 programme [ep07.P5](#) résolvant (P_5)
- 2 programme [ep07.ordreP5](#) permettant de représenter l'ordre de la méthode des éléments finis $\mathbb{P}_1$ -Lagrange.

• Validation 6: $\eta = 0, \Gamma^D \neq \emptyset, \Gamma^R \neq \emptyset, \alpha = 0$.



$$(P_6) \begin{cases} -\Delta u = f, & \text{dans } \Omega = \Omega_1 & (P_{6.1}) \\ u = g_D, & \text{sur } \Gamma^D = \bigcup_{l \in [1,2]} \Gamma_l & (P_{6.2}) \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g_R, & \text{sur } \Gamma^R = \bigcup_{l \in [3,4]} \Gamma_l & (P_{6.3}) \end{cases}$$

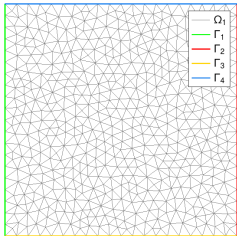
$$(F.V.H) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_{g_D, \Gamma_h^D}(\Omega_h) \text{ tel que} \\ \mathcal{A}_h(u_h, \varphi_i) = \mathcal{L}_h(\varphi_i), \forall i \in \mathcal{I}_D^c \end{cases}$$

$$\mathcal{A}_h(u, v) = \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle dq \text{ et } \mathcal{L}_h(v) = \int_{\Omega} f \cdot v dq + \int_{\Gamma_h^R} g_R \cdot v d\sigma$$

- Calcul de $\mathbb{A}^h \in \mathcal{M}_{n_q}(\mathbb{R})$, t.q. $\mathbb{A}_{i,j}^h = \mathcal{A}_h(\varphi_j, \varphi_i)$, (3) $\Rightarrow \mathbb{A}^h = \mathbb{K}(\Omega_h)$
- Calcul de $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n_q}$, t.q. $\mathbf{b}_i = \mathcal{L}_h(\varphi_i)$

$$(4) \Rightarrow \mathbf{b} \approx \mathbb{M}(\Omega_h) * \mathbf{F} + \sum_{l \in [3,4]} \mathbb{M}^G(\Gamma_l^h) * \mathbf{G}^l$$

• Validation 6: $\eta = 0, \Gamma^D \neq \emptyset, \Gamma^R \neq \emptyset, \alpha = 0$.



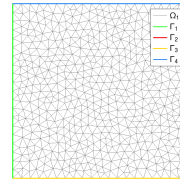
$$(P_6) \begin{cases} -\Delta u = f, & \text{dans } \Omega = \Omega_1 & (P_{6.1}) \\ u = g_D, & \text{sur } \Gamma^D = \bigcup_{l \in [1,2]} \Gamma_l & (P_{6.2}) \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g_R, & \text{sur } \Gamma^R = \bigcup_{l \in [3,4]} \Gamma_l & (P_{6.3}) \end{cases}$$

On choisit la solution exacte $u(x, y) = \cos(\pi(x - y))$ ce qui impose ...

Exo: Ecrire les codes suivants

- 1 programme [ep07.P6](#) résolvant (P_6)
- 2 programme [ep07.ordreP6](#) permettant de représenter l'ordre de la méthode des éléments finis $\mathbb{P}_1$ -Lagrange.

• Validation 9: $\eta > 0, \Gamma^D \neq \emptyset, \Gamma^R \neq \emptyset, \alpha > 0$.



$$(P_9) \begin{cases} \eta u - \Delta u = f, & \text{dans } \Omega = \Omega_1 & (P_{9.1}) \\ u = g_D, & \text{sur } \Gamma^D = \bigcup_{l \in [1,2]} \Gamma_l & (P_{9.2}) \\ \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = g_R, & \text{sur } \Gamma^R = \bigcup_{l \in [3,4]} \Gamma_l & (P_{9.3}) \end{cases}$$

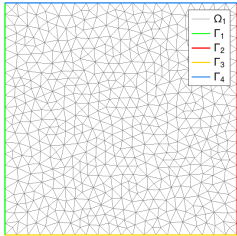
$$(F.V.H) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_{g_D, \Gamma_h^D}(\Omega_h) \text{ tel que} \\ \mathcal{A}_h(u_h, \varphi_i) = \mathcal{L}_h(\varphi_i), \forall i \in \mathcal{I}_D^c \end{cases}$$

$$\mathcal{A}_h(u, v) = \eta \int_{\Omega} u \cdot v dq + \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle dq + \alpha \int_{\Gamma_h^R} u \cdot v d\sigma \text{ et } \mathcal{L}_h(v) = \int_{\Omega} f \cdot v dq + \int_{\Gamma_h^R} g_R \cdot v d\sigma$$

- Calcul de $\mathbb{A}^h \in \mathcal{M}_{n_q}(\mathbb{R})$, t.q. $\mathbb{A}_{i,j}^h = \mathcal{A}_h(\varphi_j, \varphi_i)$,
(3) $\Rightarrow \mathbb{A}^h = \eta \mathbb{M}(\Omega_h) + \mathbb{K}(\Omega_h) + \alpha \sum_{l \in [3,4]} \mathbb{M}^G(\Gamma_l^h)$
- Calcul de $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n_q}$, t.q. $\mathbf{b}_i = \mathcal{L}_h(\varphi_i)$

$$(4) \Rightarrow \mathbf{b} \approx \mathbb{M}(\Omega_h) * \mathbf{F} + \sum_{l \in [3,4]} \mathbb{M}^G(\Gamma_l^h) * \mathbf{G}^l$$

• Validation 9: $\eta > 0$, $\Gamma^D \neq \emptyset$, $\Gamma^R \neq \emptyset$, $\alpha > 0$.



$$(P_9) \begin{cases} \eta u - \Delta u = f, & \text{dans } \Omega = \Omega_1 & (P_9.1) \\ u = g_D, & \text{sur } \Gamma^D = \bigcup_{l \in [1,2]} \Gamma_l & (P_9.2) \\ \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = g_R, & \text{sur } \Gamma^R = \bigcup_{l \in [3,4]} \Gamma_l & (P_9.3) \end{cases}$$

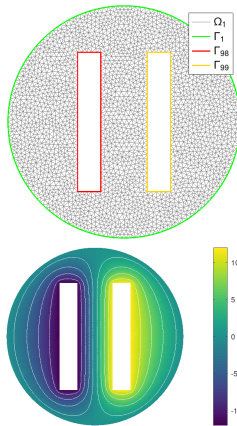
On choisi la solution exacte $u(x, y) = \cos(\pi(x - y))$...

Exo: Ecrire les codes suivants

- 1 programme [ep07.P6](#) résolvant (P_6)
- 2 programme [ep07.ordreP6](#) permettant de représenter l'ordre de la méthode des éléments finis $\mathbb{P}_1$ -Lagrange.

Plan

- 1 Calcul de $\mathbb{A}^h$
- 2 Calcul de b
- 3 Validations
- 4 Applications

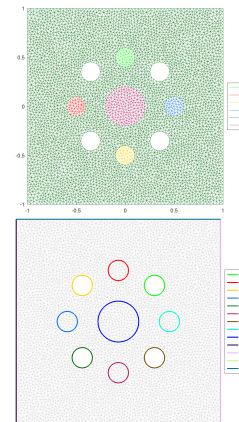


$$(A_1) \begin{cases} -\Delta u = 0, & \text{dans } \Omega = \Omega_1 & (A_1.1) \\ u = g_D, & \text{sur } \Gamma^D = \Gamma_1 \cup \Gamma_{98} \cup \Gamma_{99} & (A_1.2) \end{cases}$$

avec $g_D = 0$, sur Γ_1 , $g_D = -12$, sur Γ_{98} et $g_D = +12$, sur Γ_{99} .

```
meshfile=fc_oogmsh.gmsh.buildmesh2d('condenser',N);
Th=fc_simesh.siMesh(meshfile);
```

Exo: Ecrire un programme [ep07.A1](#) résolvant (A_1) .

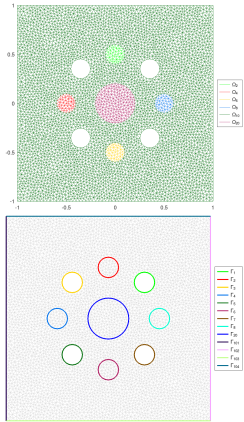


$$(A_2) \begin{cases} -\Delta u = 0, & \text{dans } \Omega & (A_2.1) \\ u = g_D, & \text{sur } \Gamma^D = \partial\Omega & (A_2.2) \end{cases}$$

avec $g_D = +12$, sur $\Gamma_{[1,3]}$, $g_D = -12$, sur $\Gamma_{[5,7]}$ et $g_D = 0$, sur $\Gamma_{101:104}$.

```
meshfile=fc_oogmsh.gmsh.buildmesh2d('condenser11',N);
Th=fc_simesh.siMesh(meshfile);
```

Exo: Ecrire un programme [ep07.A2](#) résolvant (A_2) .



$$(A_3) \begin{cases} -\Delta u = 0, & \text{dans } \Omega & (A_3.1) \\ u = g_D, & \text{sur } \Gamma^D = \bigcup_{I \in [1,3,5,7]} \Gamma_I & (A_3.2) \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0, & \text{sur } \Gamma^R = \bigcup_{I \in [101:104]} \Gamma_I & (A_3.3) \end{cases}$$

avec $g_D = +12$, sur $\Gamma_{[1,3]}$, $g_D = -12$, sur $\Gamma_{[5,7]}$. et $g_R = 0$, sur $\Gamma_{101:104}$.

```
meshfile=fc_oogmsh.gmsh.buildmesh2d('condenser11',N);
Th=fc_simesh.siMesh(meshfile);
```

Exo: Ecrire un programme [ep07.A3](#) résolvant (A_3) .