Ingénieurs MACS 2 - TP F.E.M. (S8)

Eléments finis P_1-Lagrange et maillages

François Cuvelier

Laboratoire d'Analyse Géométrie et Applications
Institut Galilée
Université Paris XIII.

2022/02/25

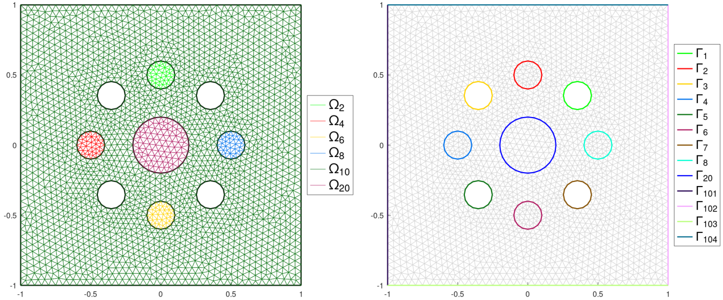


Figure: Exemple de maillage 2D

$$-\operatorname{div}(\alpha \nabla u) = 0 \qquad \text{dans } \Omega = \Omega_{[2:2:10,20]}, \tag{1}$$

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \qquad \text{dans } \Gamma_N = \Gamma_{101:104}, \tag{2}$$

$$u = g_D \qquad \text{sur } \Gamma_D = \Gamma_{1:2:7} \tag{3}$$

avec $\alpha = 10$, dans Ω_{10}, $\alpha = 20$, dans Ω_{20}, et $\alpha = 1$ sinon,
$g_D = 12$ sur $\Gamma_{[3,7]}$, et $g_D = 0$ sur $\Gamma_{[1,5]}$.

Pour les éléments finis P_1-Lagrange les maillages doivent être composés de *d*-simplexes:

- 0-simplexe : point dans $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$,
- 1-simplexe : segment, défini par 2 points distincts dans $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$,
- 2-simplexe : triangle, défini par 3 points distincts dans $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$,
- 3-simplexe : tétrahèdre, défini par 4 points distincts dans $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$,
- ...
- d-simplexe : défini par $(d+1)$ points distincts dans $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant d$.

Dans notre example:

Ω_i^h composés de 2-simplexes et Γ_i^h composés de 1-simplexes.

Les Ω_i^h et Γ_i^h sont appelés : $\boxed{\text{maillages élémentaires}}$

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^2$.

Définition

On appelle triangulation de Ω, une famille $\mathcal{T}_h$ de triangles T_k, $k = 1, \dots, n_{\mathrm{me}}$[a], ayant les propriétés suivantes :

(i) l'intersection entre deux triangles distincts est soit vide, soit réduite à une coté entier ou à un point;

(ii) tous les coins de la frontière Γ sont des sommets de triangles de $\mathcal{T}_h$;

(iii) réciproquement, soit

$$\Omega_h = \bigcup_{k=1}^{n_{\mathrm{me}}} T_k \tag{4}$$

(remarquer que Ω_h est fermé); tous les coins de $\Gamma_h = \partial\Omega_h$ doivent être sur Γ;

(iv) les triangles ne sont pas dégénérés, *ie.* ils ne sont pas d'aire nulle.

[a] n_{me} *number of mesh elements*

Remarque

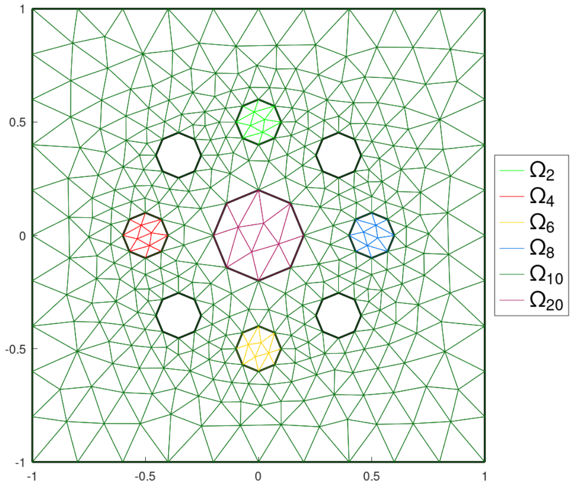
nous avons

$$\Omega_h = \bigcup_{k=1}^{n_{\mathrm{me}}} T_k \quad \text{et} \quad \bigcap_{k=1}^{n_{\mathrm{me}}} \mathring{T}_k = \emptyset \tag{5}$$

nom	type	dimension	descriptif
n_{q}	entier	1	nombre total de noeuds (sommets) du maillage
n_{me}	entier	1	nombre de triangles
q	réels	$2 \times n_q$	tableau des sommets/points. q(il , i) est la il -ème coordonnée du i-ème sommet, il $\in \{1, 2\}$ et i $\in \{1, \ldots, n_q\}$. Le i-ème sommet sera aussi noté $\boldsymbol{q}^i = (\boldsymbol{q}^i_x, \boldsymbol{q}^i_y)$ avec $\boldsymbol{q}^i_x =$ q(1, i) et $\boldsymbol{q}^i_y =$ q(2, i)
me	entier	$3 \times n_{\mathrm{me}}$	tableau de connectivité. me(jl , k) indice de stockage, dans le tableau q , du jl -ème sommet du triangle d'indice k, jl $\in \{1, 2, 3\}$ et k $\in \{1, \ldots, n_{\mathrm{me}}\}$. Pour tout triangle la numérotation des points est dans le **sens direct**. q (:, me(1,k)) est le 1er sommet du k-ème triangle, q (:, me(2,k)) est le 2ème sommet, ...

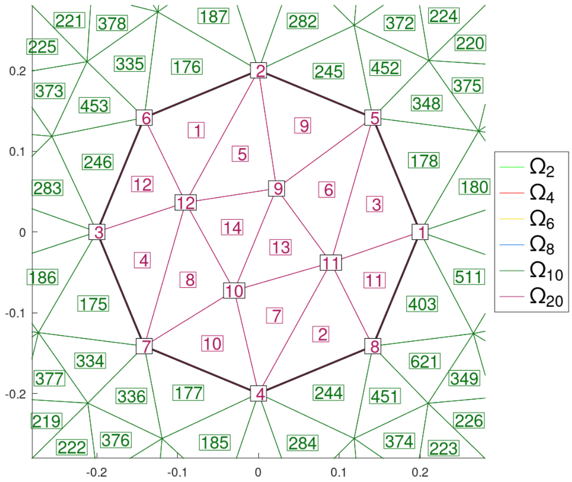
On généralise en dimension supérieure!

Maillage composé de d-simplexes dans $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant d$?

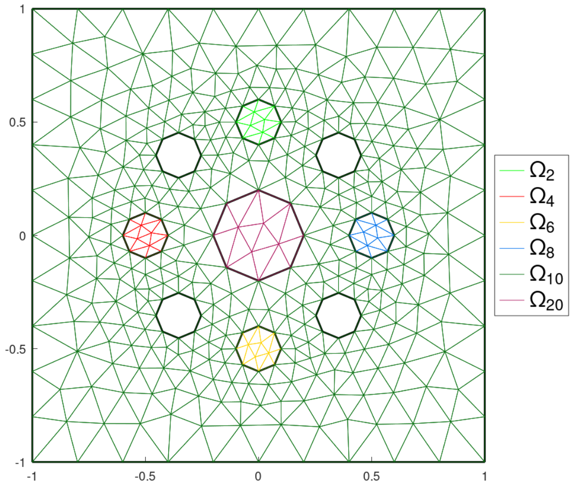


Ω_2^h : q2 , me2 , . . . Ω_{20}^h : q20 , me20

Ω^h : q , me (maillage global)

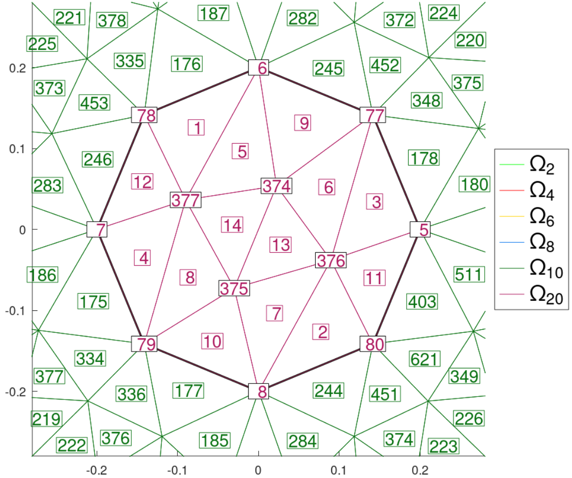


Numérotation locale des sommets de Ω_{20}^h



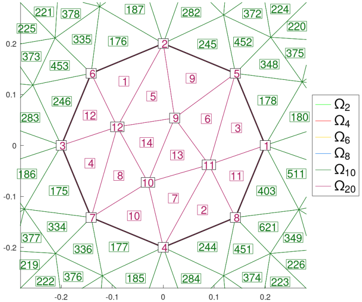
Ω_2^h : q2 , me2 , ... Ω_{20}^h : q20 , me20

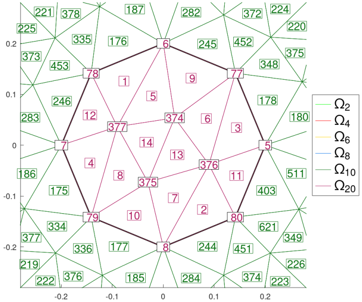
Ω^h : q , me (maillage global)



Numérotation globale des sommets de Ω_{20}^h

tableau toG20



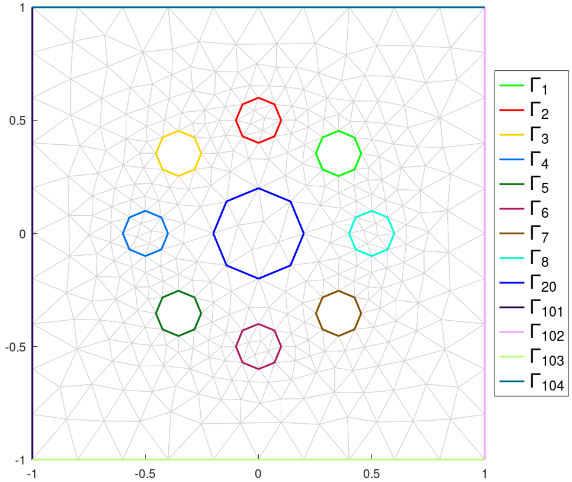


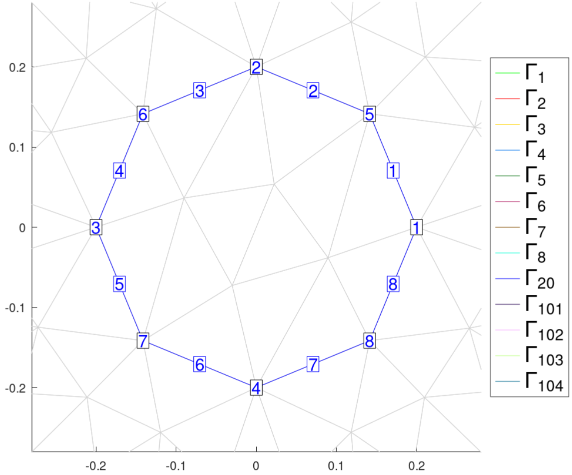
Numérotation locale (haut) et globale (bas)

```
q20 =

 Columns 1 through 8:

   0.2000        0  -0.2000        0   0.1414  -0.1414  -0.1414   0.1414
        0   0.2000        0  -0.2000   0.1414   0.1414  -0.1414  -0.1414

 Columns 9 through 12:

   0.0223  -0.0301   0.0895  -0.0902
   0.0538  -0.0727  -0.0380   0.0364

me20 =

    2    4    1    3    9    5   10    7    5    7    8    6    9   10
    6    8    5    7    2    9    4   10    2    4    1    3   10    9
   12   11   11   12   12   11   11   12    9   10   11   12   11   12

toG20 =

     5     6     7     8    77    78    79    80   374   375   376   377
```

k=5; q20(:,me20(:,k)) == q(:,toG20(me20(:,k)))

Executer prog03 sous Octave!

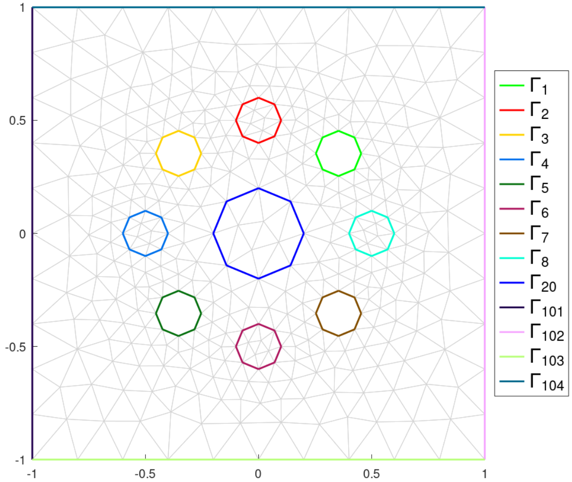


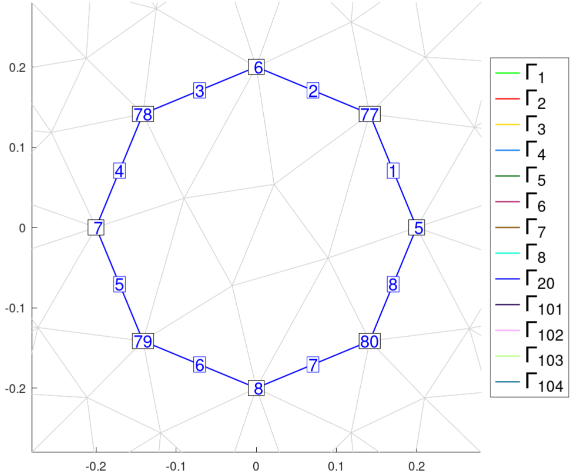


Γ_1^h : q_b1 , me_b1 , ... Γ_{104}^h : q_b104 , me_b104

Ω^h : q , me (maillage global)

Numérotation locale des sommets de Γ_{20}^h

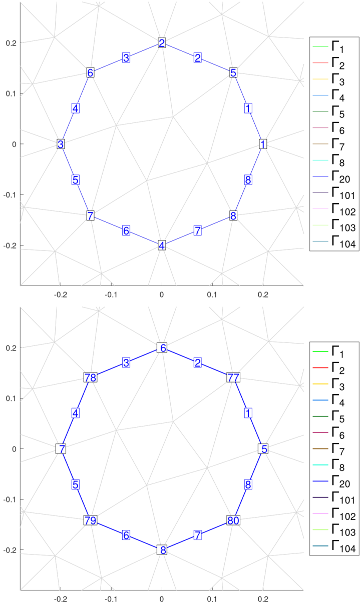




Γ_1^h : q_b1 , me_b1 , ... Γ_{104}^h : q_b104 , me_b104

Ω^h : q , me (maillage global)

Numérotation globale des sommets de Γ_{20}^h
tableau toG_b20



Numérotation locale (haut) et globale (bas)

```
q_b20 =

   0.2000        0   -0.2000        0   0.1414  -0.1414  -0.1414   0.1414
        0   0.2000        0   -0.2000   0.1414   0.1414  -0.1414  -0.1414

me_b20 =

   1   5   2   6   3   7   4   8
   5   2   6   3   7   4   8   1

toG_b20 =

    5    6    7    8   77   78   79   80
```

k=3; q_b20(:,me_b20(:,k)) == q(:,toG_b20(me_b

Executer prog04 sous Octave!