Ecole d'ingénieurs Sup Galilée
Energétique - Informatique - Instrumentation
Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique
Télécommunications et Réseaux

Ingénieurs MACS 2 - TP F.E.M. (S8)

Eléments finis $\mathbb{P}_1$-Lagrange en dimension 1 : épisode 0

Eléments finis $\mathbb{P}_1$-Lagrange en dimension 1

François Cuvelier

Laboratoire d'Analyse Géométrie et Applications
Institut Galilée
Université Paris XIII.

- Présentation et résultats
- Calcul des intégrales :

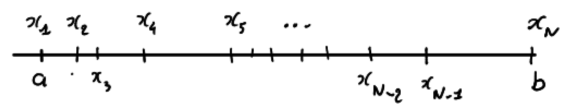
$$\int_a^b u(x)v(x)dx \quad \text{et} \quad \int_a^b u'(x)v'(x)dx$$

- Résolution d'E.D.P. avec conditions aux limites (B.V.P. Boundary Value Problems)

$$\begin{cases} -u'' + \nu u = f \quad \text{dans }]a;b[\\ + \text{ C.L. Dirichlet, Neumann et/ou Robin} \end{cases}$$

Plan

Maillage

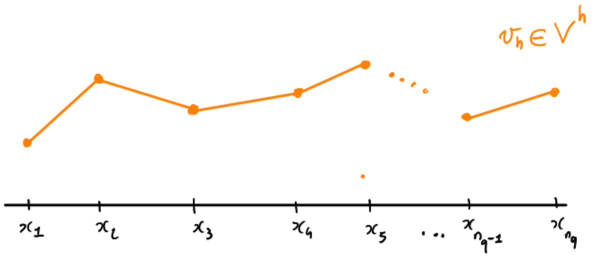


$$x_1 = a < x_2 < x_3 < \ldots < x_{n_q-1} < x_{n_q} = b, \quad \text{avec } n_q = N$$

- $I_k = [x_k; x_{k+1}]$, (mesh element) $\forall k \in [\![1, \mathrm{n_{me}}]\!]$ avec $\mathrm{n_{me}} \stackrel{\text{def}}{=} N - 1$,
- $h_k = |I_k| = x_{k+1} - x_k$ longueur de l'intervalle I_k,
- $h = \max_{k \in [\![1,\mathrm{n_{me}}]\!]} h_k$.

Exo: Ecrire une fonction Matlab/Octave `x= mesh1D(a,b,nq, ...)` permettant de générer les points $(x_i)_{i=1}^{n_q}$ non forcément uniformément distribués.

$$V^h = \left\{ v \in \mathcal{C}^0([a;b];\mathbb{R}) \text{ t.q. } \forall k \in [\![1, \mathrm{n_{me}}]\!],\ v_{|I_k} \in \mathbb{R}_1[X] \right\}$$

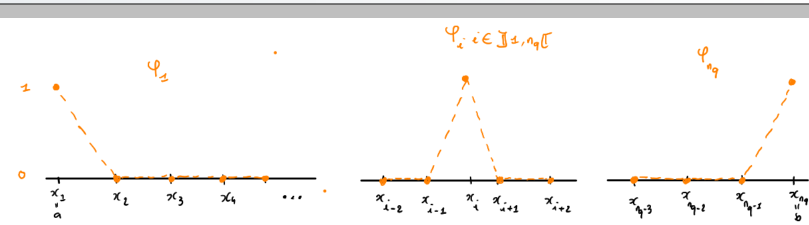


V^h est un espace vectoriel et $\dim V^h = n_\mathrm{q}$.

Exo: Soit $i \in [\![1, n_\mathrm{q}]\!]$. Construire explicitement $\varphi_i \in V^h$ tel que

$$\varphi_i(x_j) = \delta_{i,j},\ \forall j \in [\![1, \mathrm{q}]\!].$$

Exo: Soit $i \in [\![1, n_\mathrm{q}]\!]$. Construire explicitement $\varphi_i \in V^h$ tel que $\varphi_i(x_j) = \delta_{i,j},\ \forall j \in [\![1, \mathrm{q}]\!]$.



$$\varphi_1(x) = \begin{cases} -\frac{x-x_2}{h_1} & x \in [x_1, x_2] \\ 0 & x \in [x_2, x_{n_\mathrm{q}}] \end{cases} \quad \varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{h_{i-1}} & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ -\frac{x-x_{i+1}}{h_{i+1}} & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \varphi_{n_\mathrm{q}}(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{n_\mathrm{q}-1}}{h_{n_\mathrm{q}-1}} & x \in [x_{n_\mathrm{q}-1}, x_{n_\mathrm{q}}] \\ 0 & x \in [x_1, x_{n_\mathrm{q}-1}] \end{cases}$$

☞ $\operatorname{supp}\varphi_1 = [x_1, x_2[,\quad \operatorname{supp}\varphi_i =]x_{i-1}, x_{i+1}[,\quad \operatorname{supp}\varphi_{n_\mathrm{q}} =]x_{n_\mathrm{q}-1}, x_{n_\mathrm{q}}]$

Lemme: $\{\varphi_i\}_{i=1}^{n_\mathrm{q}}$ est une base de V^h.

☞ **A démontrer en autonomie**

$$\mathrm{H}^1(]a;b[) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ v \in \mathrm{L}^2(]a;b[) \text{ t.q. } v' \in \mathrm{L}^2(]a;b[) \right\}$$

- produit scalaire sur $\mathrm{H}^1(]a;b[)$:

$$\langle u, v \rangle_{\mathrm{H}^1} = \int_a^b u(x)v(x)dx + \int_a^b u'(x)v'(x)dx$$

- norme induite:

$$\|u\|_{\mathrm{H}^1} = \langle u, u \rangle_{\mathrm{H}^1}^{1/2}$$

Proposition: L'**espace de Sobolev** $\mathrm{H}^1(]a;b[)$ muni du produit scalaire $\langle \bullet, \bullet \rangle_{\mathrm{H}^1}$ est un **espace de Hilbert** (espace vectoriel normé complet).

$$\mathrm{H}^2(]a;b[) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ v \in \mathrm{H}^1(]a;b[) \text{ t.q. } v'' \in \mathrm{L}^2(]a;b[) \right\}$$

produit scalaire: $\langle u, v \rangle_{\mathrm{H}^2} = \langle u, v \rangle_{\mathrm{H}^1} + \int_a^b u''(x)v''(x)dx$, ...

$$\begin{array}{rccl} \pi_h & : & \mathrm{H}^1(]a;b[) & \longrightarrow & V^h \\ & & u & \longmapsto & \pi_h(u) = \sum_{i=1}^{n_\mathrm{q}} u(x_i)\varphi_i \end{array}$$

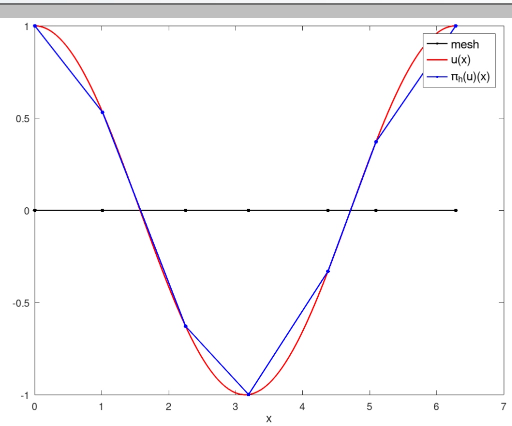
On a donc

$$\pi_h(u)(x) = \sum_{i=1}^{n_\mathrm{q}} u(x_i)\varphi_i(x),\ \forall x \in]a;b[.$$

Proposition: Si $u \in \mathrm{H}^2(]a;b[)$ alors

$$\begin{array}{ll} \exists C > 0,\ C \perp\!\!\!\perp h, & \|u - \pi_h(u)\|_{\mathrm{L}^2} \leqslant Ch^2 \|u''\|_{\mathrm{L}^2}, \\ \exists C > 0,\ C \perp\!\!\!\perp h, & \|u' - \pi_h(u)'\|_{\mathrm{L}^2} \leqslant Ch \|u''\|_{\mathrm{L}^2}, \\ \exists C > 0,\ C \perp\!\!\!\perp h, & \|u - \pi_h(u)\|_{\mathrm{H}^1} \leqslant Ch \|u''\|_{\mathrm{L}^2}. \end{array}$$

Exo: Soit $u(x) = \cos(x)$, $a = 0$, $b = 2\pi$ et $n_q = 7$. On note $(x_i)_{i=1}^{n_q}$ un "maillage" de l'intervalle $[a, b]$ obtenu avec la fonction mesh1D. Ecrire un programme permettant de représenter u et $\pi_h(u)$ (voir figure ci-dessous)



Plan

Lemme: Soient $\mathcal{A} : \mathrm{H}^1(]a;b[) \times \mathrm{H}^1(]a;b[) \longrightarrow \mathbb{R}$ une application bilinéaire continue et $(u, v) \in \mathrm{H}^1(]a;b[) \times \mathrm{H}^1(]a;b[)$. On a alors

$$\mathcal{A}\left(\pi_h(u), \pi_h(v)\right) = \langle \mathbb{A}\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V} \rangle$$

où $\langle \bullet, \bullet \rangle$ note le produit scalaire euclidien dans $\mathbb{R}^{n_q}$, $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n_q}(\mathbb{R})$, $\boldsymbol{U} \in \mathbb{R}^{n_q}$ et $\boldsymbol{V} \in \mathbb{R}^{n_q}$ avec $\mathbb{A}_{i,j} = \mathcal{A}(\varphi_j, \varphi_i)$, $\boldsymbol{U}_i = u(x_i)$ et $\boldsymbol{V}_i = v(x_i)$.

☞ **Preuve:** on a

$$\pi_h(u) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n_q} u(x_i)\varphi_i \quad \text{et} \quad \pi_h(v) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n_q} v(x_i)\varphi_i$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}\left(\pi_h(u), \pi_h(v)\right) &= \mathcal{A}\Big(\sum_{j=1}^{n_q} \boldsymbol{U}_j\varphi_j, \sum_{i=1}^{n_q} \boldsymbol{V}_i\varphi_i\Big) = \sum_{i=1}^{n_q}\Big(\sum_{j=1}^{n_q} \mathcal{A}(\varphi_j, \varphi_i)\boldsymbol{U}_j\Big)\boldsymbol{V}_i \\
&= \sum_{i=1}^{n_q}\Big(\sum_{j=1}^{n_q} \mathbb{A}_{i,j}\boldsymbol{U}_j\Big)\boldsymbol{V}_i = \sum_{i=1}^{n_q} (\mathbb{A}\boldsymbol{U})_i \boldsymbol{V}_i = \langle \mathbb{A}\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V} \rangle.
\end{aligned}$$

On souhaite calculer par **éléments finis $\mathbb{P}_1$-Lagrange**

$$\mathcal{A}(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b u(x)v(x)dx$$

Proposition: L'application $\mathcal{A} : \mathrm{H}^1(]a;b[) \times \mathrm{H}^1(]a;b[) \longrightarrow \mathbb{R}$ est bilinéaire continue.

☞ **A démontrer en autonomie**

Proposition: Si $(u, v) \in \mathrm{H}^2(]a;b[) \times \mathrm{H}^2(]a;b[)$ et h suffisament petit

$$\exists K > 0,\ K \perp\!\!\!\perp h,\quad \left|\mathcal{A}(u, v) - \mathcal{A}(\pi_h(u), \pi_h(v))\right| \leqslant Kh^2$$

☞ **A démontrer en autonomie**

Définition: Matrice de masse

Soit $\mathbb{M} \in \mathbb{R}^{n_q}$ la matrice définie par

$$\mathbb{M}_{i,j} = \int_a^b \varphi_j(x)\varphi_i(x)dx, \quad \forall (i,j) \in [\![1, n_q]\!]^2$$

Elle est appelée **Matrice de masse**

$$\mathcal{A}(u,v) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b u(x)v(x)dx \approx \mathcal{A}(\pi_h(u), \pi_h(v)) = \langle \mathbb{M}\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V} \rangle$$

Définition: Matrice de rigidité

Soit $\mathbb{K} \in \mathbb{R}^{n_q}$ la matrice définie par

$$\mathbb{K}_{i,j} = \int_a^b \varphi_j'(x)\varphi_i'(x)dx, \quad \forall (i,j) \in [\![1, n_q]\!]^2$$

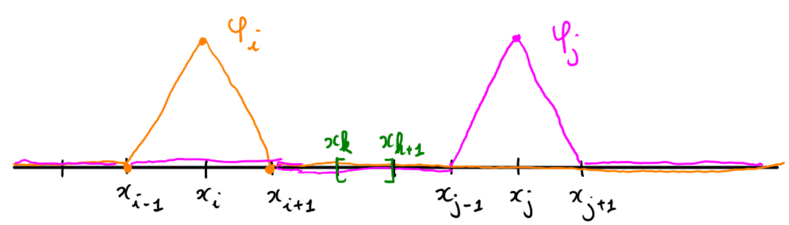
Elle est appelée **Matrice de rigidité**

$$\mathcal{A}(u,v) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b u'(x)v'(x)dx \approx \mathcal{A}(\pi_h(u)', \pi_h(v)') = \langle \mathbb{K}\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V} \rangle$$

Plan

Assemblage de $\mathbb{M} \in \mathbb{R}^{n_q}$, matrice de Masse: $\forall (i,j) \in [\![1, n_q]\!]^2$,

$$\mathbb{M}_{i,j} = \int_a^b \varphi_j(x)\varphi_i(x)dx = \sum_{k=1}^{n_{me}} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_j(x)\varphi_i(x)dx.$$



☞ $\varphi_j\varphi_i = 0$ si $|i-j| > 1$ $\Rightarrow$ $\mathbb{M}$ tridiagonale! (uniquement en 1D)

☞ sur $]x_k, x_{k+1}[$, $\varphi_i \neq 0 \Leftrightarrow i \in \{k, k+1\}$

$$\mathbb{M}_{i,j} = \sum_{k=1}^{\mathrm{n_{me}}} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_j(x)\varphi_i(x)dx.$$

Algorithme Naive finite element assembly algorithm (V1)

$\mathbb{M} \leftarrow 0$
Pour $i \leftarrow 1$ to n_q **faire**
  Pour $j \leftarrow 1$ to n_q **faire**
    Pour $k \leftarrow 1$ to $\mathrm{n_{me}}$ **faire**
      $\mathbb{M}_{i,j} \leftarrow \mathbb{M}_{i,j} + \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_j(x)\varphi_i(x)dx$
    Fin Pour
  Fin Pour
Fin Pour

Algorithme Naive finite element assembly algorithm (V2)

$\mathbb{M} \leftarrow 0$
Pour $k \leftarrow 1$ to $\mathrm{n_{me}}$ **faire**
  Pour $i \leftarrow 1$ to n_q **faire**
    Pour $j \leftarrow 1$ to n_q **faire**
      $\mathbb{M}_{i,j} \leftarrow \mathbb{M}_{i,j} + \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_j(x)\varphi_i(x)dx$
    Fin Pour
  Fin Pour
Fin Pour

$$\mathbb{M}_{i,j} = \sum_{k=1}^{\mathrm{n_{me}}} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_j(x)\varphi_i(x)dx.$$

☞ sur $]x_k, x_{k+1}[,\quad (\varphi_i \neq 0 \Leftrightarrow i \in \{k, k+1\})$ et $(\varphi_j \neq 0 \Leftrightarrow j \in \{k, k+1\})$

Algorithme Naive F.E. assembly algorithm (V2)

$\mathbb{M} \leftarrow 0$
Pour $k \leftarrow 1$ to $\mathrm{n_{me}}$ **faire**
  Pour $i \leftarrow 1$ to n_q **faire**
    Pour $j \leftarrow 1$ to n_q **faire**
      $\mathbb{M}_{i,j} \leftarrow \mathbb{M}_{i,j} + \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_j(x)\varphi_i(x)dx$
    Fin Pour
  Fin Pour
Fin Pour

Algorithme Classical F.E. assembly algorithm (V1)

$\mathbb{M} \leftarrow 0$
Pour $k \leftarrow 1$ to $\mathrm{n_{me}}$ **faire**
  Pour $i \leftarrow k$ to $k+1$ **faire**
    Pour $j \leftarrow k$ to $k+1$ **faire**
      $\mathbb{M}_{i,j} \leftarrow \mathbb{M}_{i,j} + \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_j(x)\varphi_i(x)dx$
    Fin Pour
  Fin Pour
Fin Pour

$$\mathbb{M}^{e,k} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_k(x)\varphi_k(x)dx & \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_{k+1}(x)\varphi_k(x)dx \\ \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_k(x)\varphi_{k+1}(x)dx & \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_{k+1}(x)\varphi_{k+1}(x)dx. \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

Algorithme Classical F.E. assembly algorithm (V1)

$\mathbb{M} \leftarrow 0$
Pour $k \leftarrow 1$ to $\mathrm{n_{me}}$ **faire**
  Pour $i \leftarrow k$ to $k+1$ **faire**
    Pour $j \leftarrow k$ to $k+1$ **faire**
      $\mathbb{M}_{i,j} \leftarrow \mathbb{M}_{i,j} + \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_j(x)\varphi_i(x)dx$
    Fin Pour
  Fin Pour
Fin Pour

Algorithme Classical F.E. assembly algorithm with elementary matrices (V1)

$\mathbb{M} \leftarrow 0$
Pour $k \leftarrow 1$ to $\mathrm{n_{me}}$ **faire**
  $\mathbb{M}^{e,k} \leftarrow \mathrm{MasseElem}(\ldots)$
  $I \leftarrow k : k+1$
  Pour $\alpha \leftarrow 1$ to 2 **faire**
    Pour $\beta \leftarrow 1$ to 2 **faire**
      $\mathbb{M}_{I(\alpha),I(\beta)} \leftarrow \mathbb{M}_{I(\alpha),I(\beta)} + \mathbb{M}^{e,k}_{\alpha,\beta}$
    Fin Pour
  Fin Pour
Fin Pour

$$k \in [\![1, \mathrm{n_{me}}]\!],\quad \mathbb{M}^{e,k} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_k^2(x)dx & \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_{k+1}(x)\varphi_k(x)dx \\ \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_k(x)\varphi_{k+1}(x)dx & \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_{k+1}^2(x)dx. \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

On a $\forall x \in [x_k; x_{k+1}]$,

$$\varphi_k(x) = -\frac{x - x_{k+1}}{h_k} \quad \text{et} \quad \varphi_{k+1}(x) = \frac{x - x_k}{h_k}$$

- à la main, on calcule les intégrales ...
- Formule de quadrature de Simpson exacte pour les polynômes de $\mathbb{R}_3[X]$ et

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$$

$$\Rightarrow \mathbb{M}^{e,k} = \frac{h_k}{6}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- ou ...

$$k \in [\![1, \mathrm{n_{me}}]\!], \quad \mathbb{M}^{e,k} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_k^2(x)dx & \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_{k+1}(x)\varphi_k(x)dx \\ \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_k(x)\varphi_{k+1}(x)dx & \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_{k+1}^2(x)dx. \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

Utilisation de la formule magique (existe en dimension supérieure):

Lemme: Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha < \beta$, et λ_0, λ_1 dans $\mathbb{R}_1[X]$ vérifiant

$$\lambda_0(\alpha) = 1, \lambda_0(\beta) = 0 \ \text{ et } \ \lambda_1(\alpha) = 0, \lambda_1(\beta) = 1$$

Alors $\forall(\nu_0, \nu_1) \in \mathbb{N}^2$, on a

$$\int_\alpha^\beta \lambda_0^{\nu_0}(x)\lambda_1^{\nu_1}(x)dx = (\beta - \alpha)\frac{\nu_0!\nu_1!}{(1 + \nu_0 + \nu_1)!}. \tag{1}$$

Application: $(\alpha, \beta) = (x_k, x_{k+1})$, $\lambda_0 = \varphi_k$, $\lambda_1 = \varphi_{k+1}$

$$\Rightarrow \mathbb{M}^{e,k} = \frac{h_k}{6}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exo:

1. Ecrire une fonction Matlab/Octave Masse retournant la matrice de masse pour un maillage donné $(x_i)_{i=0}^{n_q}$.
2. Ecrire un programme permettant de tester/valider rapidement cette fonction.
3. Ecrire un programme permettant de vérifier que si u et v sont dans $\mathrm{H}^2(]a; b[)$ alors

$$\left| \int_a^b u(x)v(x)dx - \int_a^b \pi_h(u)(x)\pi_h(v)(x)dx \right| = \mathcal{O}(h^2)$$

☞ Voir +ep00/Masse.m, +ep00/testMasse.m, +ep00/ordreMasse.m

$$\mathbb{K}_{i,j} = \sum_{k=1}^{\mathrm{n_{me}}} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_j'(x)\varphi_i'(x)dx.$$

☞ sur $]x_k, x_{k+1}[$, $\left(\varphi_i' \neq 0 \Leftrightarrow i \in \{k, k+1\}\right)$ et $\left(\varphi_j' \neq 0 \Leftrightarrow j \in \{k, k+1\}\right)$

Algorithme Classical F.E. assembly algorithm (V1)

$\mathbb{K} \leftarrow 0$
Pour $k \leftarrow 1$ to $\mathrm{n_{me}}$ **faire**
  Pour $i \leftarrow k$ to $k+1$ **faire**
    Pour $j \leftarrow k$ to $k+1$ **faire**
      $\mathbb{K}_{i,j} \leftarrow \mathbb{K}_{i,j} + \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_j'(x)\varphi_i'(x)dx$
    Fin Pour
  Fin Pour
Fin Pour

$$\mathbb{K}^{e,k} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_k'\varphi_k' dx & \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_{k+1}'\varphi_k' dx \\ \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_k'\varphi_{k+1}' dx & \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_{k+1}'\varphi_{k+1}' dx. \end{pmatrix}$$

Sur $[x_k; x_{k+1}]$, $\varphi_k'(x) = \frac{-1}{h_k}$ et $\varphi_{k+1}'(x) = \frac{1}{h_k}$

$$\Rightarrow \mathbb{K}^{e,k} = \frac{1}{h_k}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{K}_{i,j} = \sum_{k=1}^{\mathrm{n_{me}}} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_j'(x)\varphi_i'(x)dx.$$

Algorithme Classical F.E. assembly algorithm with elementary matrices (V1)

$\mathbb{K} \leftarrow 0$
Pour $k \leftarrow 1$ to $\mathrm{n_{me}}$ **faire**
  $\mathbb{K}^{e,k} \leftarrow \mathrm{RigiditeElem}(h_k)$
  $I \leftarrow k : k+1$
  Pour $\alpha \leftarrow 1$ to 2 **faire**
    Pour $\beta \leftarrow 1$ to 2 **faire**
      $\mathbb{K}_{I(\alpha),I(\beta)} \leftarrow \mathbb{K}_{I(\alpha),I(\beta)} + \mathbb{K}_{\alpha,\beta}^{e,k}$
    Fin Pour
  Fin Pour
Fin Pour

$$\mathbb{K}^{e,k} = \frac{1}{h_k}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exo:

1. Ecrire la fonction Matlab/Octave Rigidite retournant la matrice de rigidité pour un maillage donné $(x_i)_{i=0}^{n_q}$.
2. Ecrire un programme permettant de tester/valider rapidement cette fonction.

☞ Voir +ep00/Rigidite.m, +ep00/testRigidite.m

Plan

Problème modèle (PM1): Trouver u solution de

$$\begin{cases} -u'' + \nu u &= f \quad \text{dans }]a, b[, \\ u(a) &= g_a \\ u(b) &= g_b \end{cases} \tag{PM1}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{H}^1_{g_a,g_b}(]a;b[) &= \{u \in \mathrm{H}^1(]a;b[) \text{ t.q. } u(a) = g_a \text{ et } u(b) = g_b\} \\ \mathrm{H}^1_0(]a;b[) &= \{u \in \mathrm{H}^1(]a;b[) \text{ t.q. } u(a) = u(b) = 0\} \end{aligned}$$

Problème variationnelle associé à (PM1): Trouver $u \in \mathrm{H}^1_{g_a,g_b}(]a;b[)$ tel que

$$\mathcal{A}(u,v) = \mathcal{L}(v), \ \forall v \in \mathrm{H}^1_0(]a;b[) \tag{PV1}$$

avec

$$\mathcal{A}(u,v) = \int_a^b u'v'dx + \nu \int_a^b uvdx \text{ et } \mathcal{L}(v) = \int_a^b fvdx$$

☞ Savoir établir cette formulation variationnelle (voir cours de Mr Vauchelet)

$$\text{Trouver } u \in \mathrm{H}^1_{g_a,g_b}(]a;b[) \text{ t.q. } \ \mathcal{A}(u,v) = \mathcal{L}(v), \ \forall v \in \mathrm{H}^1_0(]a;b[) \tag{PV1}$$

Theorem 1: Lax-Milgram

Soient V un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$ de norme $\|.\|_V$, $\mathcal{L} : V \longrightarrow \mathbb{R}$ une application linéaire continue et $\mathcal{A} : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ une application bilinéaire continue.
Si $\mathcal{A}$ est V-elliptique (coercive), i.e. $\exists \beta > 0$ tel que

$$\forall v \in V, \quad \mathcal{A}(v,v) \geqslant \beta \|v\|_V^2$$

alors le problème :

$$\text{trouver } u \in V \ : \ \mathcal{A}(u,v) = \mathcal{L}(v), \ \forall v \in V, \tag{2}$$

admet une unique solution.

☞ Peut-on appliquer le théorème de Lax-Milgram à (PV1)?

$$\text{Trouver } u \in \mathrm{H}^1_{g_a,g_b}(]a;b[) \text{ t.q. } \mathcal{A}(u,v) = \mathcal{L}(v),\ \forall v \in \mathrm{H}^1_0(]a;b[) \tag{PV1}$$

✍ Relèvement: $\exists R \in \mathrm{H}^1(]a;b[)$ tel que $R(a) = g_a$ et $R(b) = g_b$, par exemple, la fonction affine:

$$R(x) = \frac{x-a}{b-a}(g_b - g_a) + g_a.$$

On pose $w \stackrel{\text{def}}{=} u - R$ alors $w \in \mathrm{H}^1_0(]a;b[)$ et

$$\mathcal{A}(u,v) = \mathcal{A}(w+R,v) = \mathcal{A}(w,v) + \mathcal{A}(R,v).$$

Formulation variationnelle avec relèvement associé à (PM1): Trouver $w \in \mathrm{H}^1_0(]a;b[)$ tel que

$$\mathcal{A}(w,v) = \mathcal{L}_R(v),\ \forall v \in \mathrm{H}^1_0(]a;b[) \tag{FVR1}$$

avec $\mathcal{L}_R(v) = \mathcal{L}(v) - \mathcal{A}(R,v)$.

☞ Le théorème de Lax-Milgram s'applique (FVR1)!

$\Longrightarrow \exists! w \in \mathrm{H}^1_0(]a;b[)$ sol. de (FVR1)

Soit $R \in \mathrm{H}^1(]a;b[)$ un relèvement tel que $R(a) = g_a$ et $R(b) = g_b$.
w est alors l'unique solution (dépendent de R) de

Trouver $w \in \mathrm{H}^1_0(]a;b[)$ tel que

$$\mathcal{A}(u,v) = \mathcal{L}(v) - \mathcal{A}(R,v),\ \forall v \in \mathrm{H}^1_0(]a;b[) \tag{FVR1}$$

En posant $u = w + R$, on a $u \in \mathrm{H}^1_{g_a,g_b}(]a;b[)$ et u est solution de

Trouver $u \in \mathrm{H}^1_{g_a,g_b}(]a;b[)$ tel que

$$\mathcal{A}(u,v) = \mathcal{L}(v),\ \forall v \in \mathrm{H}^1_0(]a;b[) \tag{PV1}$$

☞ On a donc existence d'une solution de (PV1)

Exo. Démontrer que (PV1) admet une unique solution.

Formulation variationnelle associé à (PM1): Trouver $u \in \mathrm{H}^1_{g_a,g_b}(]a;b[)$ tel que

$$\mathcal{A}(u,v) = \mathcal{L}(v),\ \forall v \in \mathrm{H}^1_0(]a;b[) \tag{PV1}$$

avec

$$\mathcal{A}(u,v) = \int_a^b u'v'dx + \nu \int_a^b uvdx \text{ et } \mathcal{L}(v) = \int_a^b fvdx$$

- $(x_i)_{i=1}^{n_q}$ discrétisation de $[a;b]$: $x_1 = a < x_2 < x_3 < \ldots < x_{n_q-1} < x_{n_q} = b$
- V^h, espace vectoriel des éléments finis $\mathbb{P}_1$-Lagrange:

$$V^h = \mathrm{Vect}\left(\varphi_0, \ldots, \varphi_{n_q}\right) \subset \mathrm{H}^1(]a;b[)$$

Formulation variationnelle discrète: Trouver $u_h \in \mathrm{V}^h_{g_a,g_b} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{H}^1_{g_a,g_b}(]a;b[) \cap \mathrm{V}^h$ tel que

$$\mathcal{A}(u_h,v_h) = \mathcal{L}(v_h),\ \forall v_h \in \mathrm{V}^h_0 \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{H}^1_0(]a;b[) \cap \mathrm{V}^h. \tag{FVD1}$$

- $(x_i)_{i=1}^{n_q}$ discrétisation de $[a;b]$: $x_1 = a < x_2 < x_3 < \ldots < x_{n_q-1} < x_{n_q} = b$
- $V^h = \mathrm{Vect}\left(\varphi_0, \ldots, \varphi_{n_q}\right) \subset \mathrm{H}^1(]a;b[)$

Formulation variationnelle discrète: Trouver $u_h \in \mathrm{V}^h_{g_a,g_b} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{H}^1_{g_a,g_b}(]a;b[) \cap \mathrm{V}^h$ tel que

$$\mathcal{A}(u_h,v_h) = \mathcal{L}(v_h),\ \forall v_h \in \mathrm{V}^h_0 \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{H}^1_0(]a;b[) \cap \mathrm{V}^h. \tag{FVD1}$$

inconnues

$$\begin{aligned} u_h \in V^h_{g_a,g_b} &\Leftrightarrow \forall x \in [a;b],\ u_h(x) &= g_a\varphi_1(x) + \sum_{i=2}^{n_q-1} U_i\varphi_i(x) + g_b\varphi_{n_q}(x), \\ v_h \in V^h_0 &\Leftrightarrow \forall x \in [a;b],\ v_h(x) &= \sum_{i=2}^{n_q-1} V_i\varphi_i(x),\quad V_i = v_h(x_i). \end{aligned}$$

Proposition: V^h et V^h_0 muni du produit scalaire de $\mathrm{H}^1(]a;b[)$ sont des espace de Hilbert

⚠ $V^h_{g_a,g_b}$ n'est pas un espace vectoriel

- $(x_i)_{i=1}^{n_q}$ discrétisation de $[a;b]$: $x_1 = a < x_2 < x_3 < \ldots < x_{n_q-1} < x_{n_q} = b$
- $V^h = \mathrm{Vect}\,(\varphi_0, \ldots, \varphi_{n_q}) \subset \mathrm{H}^1(]a;b[)$

$$\text{Trouver } u_h \in V^h_{g_a,g_b} \text{ t.q. } \mathcal{A}(u_h, v_h) = \mathcal{L}(v_h),\ \forall v_h \in V^h_0. \qquad \text{(FVD1)}$$

Proposition: Le problème variationnel discret (FVD1) admet une unique solution.

✍ Preuve: similaire à celle du problème variationnel (PV1).

- $V^h_{g_a,g_b}$ n'est pas un espace vectoriel : théo. de Lax-Milgram non applicable directement.
- **Relèvement:** $\exists R_h \in V^h$ tel que $R_h(a) = g_a$ et $R_h(b) = g_b$, par ex.

$$R_h(x) = g_a\varphi_1(x) + g_b\varphi_{n_q}(x).$$

- si $u_h \in V^h_{g_a,g_b}$ alors $w_h \stackrel{\text{def}}{=} u_h - R_h \in V^h_0$.

- $(x_i)_{i=1}^{n_q}$ discrétisation de $[a;b]$: $x_1 = a < x_2 < x_3 < \ldots < x_{n_q-1} < x_{n_q} = b$
- $V^h = \mathrm{Vect}\,(\varphi_0, \ldots, \varphi_{n_q}) \subset \mathrm{H}^1(]a;b[)$

$$\text{Trouver } u_h \in V^h_{g_a,g_b} \text{ t.q. } \mathcal{A}(u_h, v_h) = \mathcal{L}(v_h),\ \forall v_h \in V^h_0. \qquad \text{(FVD1)}$$

Proposition: Le problème variationnel discret (FVD1) admet une unique solution.

✍ Preuve (suite):

F. V. discrète avec relèvement associé à (PM1): Trouver $w_h \in V^h_0$ tel que

$$\mathcal{A}(w_h, v_h) = \tilde{\mathcal{L}}(v_h) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}(v_h) - \mathcal{A}(R_h, v_h),\ \forall v_h \in V^h_0. \qquad \text{(FVRD1)}$$

- Le théo. de Lax-Milgram s'applique:
  $\Rightarrow \exists! w_h \in V^h_0$ sol. de (FVRD1).
- $u_h = w_h + R_h$ est une sol. de (FVD1). ⚠rélèvement pas unique!
- L'unicité de u_h se démontre comme pour (PV1).

- $(x_i)_{i=1}^{n_q}$ discrétisation de $[a;b]$: $x_1 = a < x_2 < x_3 < \ldots < x_{n_q-1} < x_{n_q} = b$
- $V^h = \mathrm{Vect}\,(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n_q})$, $V^h_0 = \mathrm{Vect}\,(\varphi_2, \ldots, \varphi_{n_q-1})$

$$v_h \in V^h_0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in [a;b],\ v_h(x) \quad = \quad \sum_{i=2}^{n_q-1} V_i\varphi_i(x), \quad V_i = v_h(x_i).$$

$$\text{Trouver } u_h \in V^h_{g_a,g_b} \text{ t.q. } \quad \mathcal{A}(u_h, v_h) = \mathcal{L}(v_h),\ \forall v_h \in V^h_0. \qquad \text{(FVD1)}$$

Exo: Démontrer que (FVD1) est équivalent à

$$\text{Trouver } u_h \in V^h_{g_a,g_b} \text{ t.q. } \quad \mathcal{A}(u_h, \varphi_i) = \mathcal{L}(\varphi_i),\ \forall i \in [\![2, n_q - 1]\!]. \qquad (3)$$

☞ A faire en autonomie

$$\text{Trouver } u_h \in V^h_{g_a,g_b} \text{ t.q. } \quad \mathcal{A}(u_h, v_h) = \mathcal{L}(v_h),\ \forall v_h \in V^h_0. \qquad \text{(FVD1)}$$

$$u_h \in V^h_{g_a,g_b} \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in [a;b],\ u_h(x) \quad = \quad g_a\varphi_1(x) + \sum_{i=2}^{n_q-1} U_i\varphi_i(x) + g_b\varphi_{n_q}(x).$$

$$\text{(FVD1)} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V^h_{g_a,g_b} \text{ t.q.} \\ \qquad \mathcal{A}(u_h, \varphi_i) = \mathcal{L}(\varphi_i),\ \forall i \in [\![2, n_q - 1]\!]. \end{cases} \qquad (3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V^h \text{ t.q.} \\ \qquad u_h(a) = g_a \\ \qquad \mathcal{A}(u_h, \varphi_i) = \mathcal{L}(\varphi_i),\ \forall i \in [\![2, n_q - 1]\!] \\ \qquad u_h(b) = g_b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Trouver } \boldsymbol{U} \in \mathbb{R}^{n_q} \quad (u_h = \sum_{j=1}^{n_q} U_j\varphi_j)\text{t.q.} \\ \qquad U_1 = g_a \\ \qquad \sum_{j=1}^{n_q} \mathcal{A}(\varphi_j, \varphi_i)U_j = \mathcal{L}(\varphi_i),\ \forall i \in [\![2, n_q - 1]\!] \\ \qquad U_2 = g_b \end{cases} \qquad (4)$$

☞ (4): n_q inconnues, n_q équations linéaires ⇔ système linéaire.

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Trouver } \boldsymbol{U} \in \mathbb{R}^{n_q} \quad (u_h = \sum_{j=1}^{n_q} U_j \varphi_j) \text{t.q.}\\ \quad U_1 = g_a\\ \quad \sum_{j=1}^{n_q} \mathcal{A}(\varphi_j, \varphi_i) U_j = \mathcal{L}(\varphi_i), \ \forall i \in [\![2, n_q - 1]\!]\\ \quad U_2 = g_b\end{array}\right. \tag{4}$$

- Calcul de $\mathcal{A}(\varphi_j, \varphi_i)$: on note $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n_q}(\mathbb{R})$, $\mathbb{A} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{K} + \nu\mathbb{M}$ ($\mathbb{K}$ matrice de rigidité,$\mathbb{M}$ matrice de masse)

$$\mathcal{A}(\varphi_j, \varphi_i) = \int_a^b \varphi_j' \varphi_i' dx + \nu \int_a^b \varphi_j \varphi_i dx = \mathbb{A}_{i,j} \tag{5}$$

- Calcul de $\mathcal{L}(\varphi_i) = \int_a^b f(x)\varphi_i(x)dx$ par formules de quadrature ou

$$\mathcal{L}(\varphi_i) \approx \boldsymbol{c}_i \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b \pi_h(f)(x)\varphi_i(x)dx = \langle \mathbb{M}\boldsymbol{F}, \boldsymbol{e}_i \rangle \quad \text{avec } \boldsymbol{F} = (f(x_1), \dots, f(x_{n_q}))^t$$

On note $\boldsymbol{c} = \mathbb{M}\boldsymbol{F}$.

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Trouver } \boldsymbol{U} \in \mathbb{R}^{n_q} \quad (u_h = \sum_{j=1}^{n_q} U_j \varphi_j) \text{t.q.}\\ \quad U_1 = g_a\\ \quad \sum_{j=1}^{n_q} \mathbb{A}_{i,j} U_j = \boldsymbol{c}_i, \ \forall i \in [\![2, n_q - 1]\!]\\ \quad U_2 = g_b\end{array}\right. \tag{6}$$

est équivalent à

$$\tilde{\mathbb{A}}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{B} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \mathbb{A}_{2,1} & \dots & \dots & \mathbb{A}_{2,n_q} \\ \vdots & & & \vdots \\ \mathbb{A}_{n_q-1,1} & \dots & \dots & \mathbb{A}_{n_q-1,n_q} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_{n_q-1} \\ U_{n_q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_a \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n_q-1} \\ g_b \end{pmatrix} \tag{SL1}$$

Proposition Soient $u_h = \sum_{i=1}^{n_q} U_i \varphi_i \in V^h$, $\boldsymbol{U} = (U_i)_{i=1}^{n_q}$ sol. de (SL1) et $u \in \mathrm{H}^1(]a; b[)$ sol. de (PV1). Si $u \in \mathrm{H}^2(]a; b[)$ alors

$$\|u - u_h\|_{L^2} = \mathcal{O}(h^2) \quad \text{et} \quad \|u - u_h\|_{H^1} = \mathcal{O}(h).$$

$$\tilde{\mathbb{A}}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{B} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \mathbb{A}_{2,1} & \dots & \dots & \mathbb{A}_{2,n_q} \\ \vdots & & & \vdots \\ \mathbb{A}_{n_q-1,1} & \dots & \dots & \mathbb{A}_{n_q-1,n_q} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_{n_q-1} \\ U_{n_q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_a \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n_q-1} \\ g_b \end{pmatrix} \tag{SL1}$$

- $\mathbb{A} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{K} + \nu\mathbb{M}$ ($\mathbb{K}$ matrice de rigidité,$\mathbb{M}$ matrice de masse)
- $\boldsymbol{c} = \mathbb{M}\boldsymbol{F}$ avec $\boldsymbol{F} = (f(x_1), \dots, f(x_{n_q}))^t$

Exo. Ecrire une fonction solveBVP01 retournant le maillage et la solution du système linéaire (SL1).

Problème modèle (PM1): Trouver u solution de

$$\left\{\begin{array}{lll} -u'' + \nu u & = f & \text{dans }]a, b[, \\ u(a) & = g_a & \\ u(b) & = g_b & \end{array}\right. \tag{PM1}$$

Test/Validation: on construit un problème avec une solution exacte suffisament régulière, par ex. $u(x) = cos(x)$.
On l'injecte ensuite dans (PM1) pour obtenir les données.
Avec $a = -\pi/3$, $b = \pi/4$ et $\nu = 1$, on obtient

$$f(x) = 2\cos(x), \ g_a = \cos(-pi/3), \ g_b = \cos(\pi/4).$$

Exo. Ecrire un programme BVP01 permettant de résoudre (PM1) par éléments finis $\mathbb{P}_1$-Lagrange en utilisant le jeu de données précédent. On représentera la solution exacte et la solution numérique.

Problème modèle (PM1): Trouver u solution de

$$\begin{cases} -u'' + \nu u &= f \quad \text{dans }]a, b[, \\ u(a) &= g_a \\ u(b) &= g_b \end{cases} \tag{PM1}$$

Test/Validation: solution exacte $u(x) = \cos(x)$. Avec $a = -\pi/3$, $b = \pi/4$ et $\nu = 1$,

$$f(x) = 2\cos(x), \quad g_a = \cos(-pi/3), \quad g_b = \cos(\pi/4).$$

Rappel: Soient $u_h = \sum_{i=1}^{n_q} U_i \varphi_i \in V^h$, $\boldsymbol{U} = (U_i)_{i=1}^{n_q}$ sol. de (SL1) et $u \in \mathrm{H}^1(]a; b[)$ sol. de (PV1). Si $u \in \mathrm{H}^2(]a; b[)$ alors

$$\|u - u_h\|_{L^2} = \mathcal{O}(h^2) \quad \text{et} \quad \|u - u_h\|_{H^1} = \mathcal{O}(h).$$

Exo. Ecrire un programme ordreBVP01 permettant de vérifier l'ordre de la méthode numérique.

$\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n_q}(\mathbb{R})$, $\quad \mathbb{A} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{K} + \nu\mathbb{M}$ $\quad$ ($\mathbb{K}$ matrice de rigidité, $\mathbb{M}$ matrice de masse)

$$\color{red}{\mathcal{A}(\varphi_j, \varphi_i)} = \int_a^b \varphi_j' \varphi_i' dx + \nu \int_a^b \varphi_j \varphi_i dx = \mathbb{A}_{i,j} \tag{7}$$

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A} : \mathrm{H}^1(]a; b[) \times \mathrm{H}^1(]a; b[) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u, v) & \longmapsto & \int_a^b u'(x)v'(x)dx + \nu \int_a^b u(x)v(x)dx \end{array}$$

$\mathcal{A}$ est une forme bilinéaire symétrique, continue et coercive (si $\nu > 0$ par ex.).

$$\text{coercive} : \ \exists C > 0 \text{ t.q. } \forall v \in \mathrm{H}^1(]a; b[), \quad \mathcal{A}(v, v) \geqslant C \|v\|_{H^1}^2$$

Exo. Démontrer que $\mathbb{A}$ est symétrique définie positive (S.D.P.).

☞ A faire en autonomie. Indication: étudier $\mathcal{A} : V^h \times V^h \longrightarrow \mathbb{R}$ ...

$\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n_q}(\mathbb{R})$, $\quad \mathbb{A} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{K} + \nu\mathbb{M}$ $\quad$ ($\mathbb{K}$ matrice de rigidité, $\mathbb{M}$ matrice de masse)

$$\tilde{\mathbb{A}}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{B} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \mathbb{A}_{2,1} & \dots & \dots & \mathbb{A}_{2,n_q} \\ \vdots & & & \vdots \\ \mathbb{A}_{n_q-1,1} & \dots & \dots & \mathbb{A}_{n_q-1,n_q} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_{n_q-1} \\ U_{n_q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_a \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n_q-1} \\ g_b \end{pmatrix} \tag{SL1}$$

Remarque: La matrice $\tilde{\mathbb{A}}$ n'est pas symétrique! On a "perdu" le caractère **symétrique définie positive** de la matrice $\mathbb{A}$ ce qui nous interdit alors l'usage de nombreuses méthodes de résolution de systèmes linéaires (Cholesky, gradient conjugué, ...)

☞ Mais on peut s'en relever et aboutir à un système linéaire équivalent dont la matrice est S.D.P.

Relèvement: Soit $R_h \in V^h$ tel que $R_h(a) = g_a$ et $R_h(b) = g_b$, par ex.

$$R_h(x) = g_a \varphi_1(x) + g_b \varphi_{n_q}(x).$$

F. V. discrète avec relèvement associé à (PM1): Trouver $w_h \in V_0^h$ tel que

$$\mathcal{A}(w_h, v_h) = \tilde{\mathcal{L}}(v_h) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}(v_h) - \mathcal{A}(R_h, v_h), \ \forall v_h \in V_0^h. \tag{FVRD1}$$

$$\text{(FVD1)} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Trouver } w_h \in V_0^h \text{ t.q.} \\ \qquad \mathcal{A}(w_h, \varphi_i) = \tilde{\mathcal{L}}(\varphi_i), \ \forall i \in [\![2, n_q - 1]\!]. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Trouver } (W_j)_{j=2}^{n_q-1} \ \ (w_h = \displaystyle\sum_{j=2}^{n_q-1} W_j \varphi_j) \ \text{ t.q.} \\ \qquad \displaystyle\sum_{j=2}^{n_q-1} \mathcal{A}(\varphi_j, \varphi_i) W_j = \mathcal{L}(\varphi_i) - \mathcal{A}(R_h, \varphi_i), \ \forall i \in [\![2, n_q - 1]\!] \end{cases} \tag{8}$$

☞ (8): $(n_q - 2)$ inconnues, $(n_q - 2)$ équations linéaires $\Leftrightarrow$ système linéaire.

Relèvement: Soit $R_h \in V^h$ tel que $R_h(a) = g_a$ et $R_h(b) = g_b$, par ex.

$$R_h(x) = g_a\varphi_1(x) + g_b\varphi_{n_q}(x).$$

$$\text{(FVD1)} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Trouver } (W_j)_{j=2}^{n_q-1} \quad (w_h = \sum_{j=2}^{n_q-1} W_j\varphi_j) \quad \text{t.q.} \\ \sum_{j=2}^{n_q-1} \mathcal{A}(\varphi_j,\varphi_i)W_j = \mathcal{L}(\varphi_i) - \mathcal{A}(R_h,\varphi_i), \ \forall i \in [\![2, n_q-1]\!] \end{cases} \tag{8}$$

$\mathcal{A}(\varphi_j,\varphi_i) = \mathbb{A}_{i,j}$, $\mathcal{L}(\varphi_i) \approx (\mathbb{M}\boldsymbol{F})_i = \mathbb{M}_{i,:}\boldsymbol{F}$ et

$$\mathcal{A}(R_h,\varphi_i) = \langle \mathbb{A}\boldsymbol{R}, \boldsymbol{e}_i\rangle = (\mathbb{A}\boldsymbol{R})_i = \mathbb{A}_{i,:}\boldsymbol{R} \quad \text{avec } \boldsymbol{R} = \big(R_h(x_1),\dots,R_h(x_{n_q})\big)^t.$$

Soit $I = [\![2, n_q-1]\!]$,

$$\begin{cases} \text{Trouver } (W_j)_{j\in I} \quad \text{t.q.} \\ \sum_{j\in I} \mathbb{A}_{i,j}W_j = \mathbb{M}_{i,:}\boldsymbol{F} - \mathbb{A}_{i,:}\boldsymbol{R}, \ \forall i \in I \end{cases} \tag{9}$$

$I = [\![2, n_q-1]\!]$.

$$\begin{cases} \text{Trouver } (W_j)_{j\in I} \quad \text{t.q.} \\ \sum_{j\in I} \mathbb{A}_{i,j}W_j = \mathbb{M}_{i,:}\boldsymbol{F} - \mathbb{A}_{i,:}\boldsymbol{R}, \ \forall i \in I \end{cases} \tag{9}$$

En notant $\mathbb{A}_{I,I} \in \mathcal{M}_{n_q-2}(\mathbb{R})$ la sous-matrice de $\mathbb{A}$ obtenue en ne gardant que les lignes et colonnes dans I

$$\begin{cases} \text{Trouver } \boldsymbol{W}_I \in \mathbb{R}^{n_q-2} \quad \text{t.q.} \\ \mathbb{A}_{I,I}\boldsymbol{W}_I = \mathbb{M}_{I,:}\boldsymbol{F} - \mathbb{A}_{I,:}\boldsymbol{R} \end{cases} \tag{10}$$

Exo. Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive et $I \subset [\![1, n]\!]$ un ensemble d'entiers distincts 2 à 2. On note $m = \mathrm{card}(I)$ et $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ la sous-matrice de $\mathbb{A}$ définie par

$$\forall (i,j) \in [\![1, m]\!]^2, \quad \mathbb{B}_{i,j} = \mathbb{A}_{I(i),I(j)}.$$

Démontrer que $\mathbb{B}$ est symétrique définie positive.

☞ A faire en autonomie

Plan

Problème modèle (PM2): Trouver u solution de

$$\begin{cases} -u'' + \nu u &= f \quad \text{dans }]a, b[, \\ u(a) &= g_a \\ u'(b) + \alpha u(b) &= g_b \end{cases} \tag{PM2}$$

$$V_{g_a} = \{u \in \mathrm{H}^1(]a;b[) \text{ t.q. } u(a) = g_a\}$$
$$V_0 = \{u \in \mathrm{H}^1(]a;b[) \text{ t.q. } u(a) = 0\}$$

Problème variationnelle associé à (PM2): Trouver $u \in V_{g_a}$ tel que

$$\mathcal{A}(u,v) = \mathcal{L}(v), \ \forall v \in V_0 \tag{PV1}$$

avec

$$\mathcal{A}(u,v) = \int_a^b u'v'dx + \nu\int_a^b uvdx + \alpha u(b)v(b) \text{ et } \mathcal{L}(v) = \int_a^b fvdx + g_b v(b)$$

☞ Savoir établir cette formulation variationnelle (voir cours de Mr Vauchelet)