Ingénieurs MACS 2 - TP F.E.M. (S8)

Eléments finis $\mathbb{P}_1$-Lagrange en dimension $\geqslant 1$: épisode 3

Intégration et assemblage

François Cuvelier

Laboratoire d'Analyse Géométrie et Applications
Institut Galilée
Université Paris XIII.

Prérequis

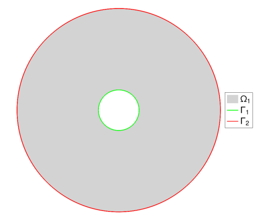
- Notion de maillages,
- Eléments finis $\mathbb{P}_1$-Lagrange en dimension 1,
- Coordonnées barycentriques sur un d-simplexe,

☞ voir épisodes précédents

Objectif : calculer des approximations d'intégrales sur un maillage élémentaire, par ex.: $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$

$$\int_{\Omega_1} u(\boldsymbol{x})v(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}, \int_{\Omega_1} \langle \boldsymbol{\nabla}\, u(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{\nabla}\, v(\boldsymbol{x})\rangle\, d\boldsymbol{x}$$

$$\int_{\Omega_1} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)v(x,y)dxdy, \quad \int_{\Gamma_2} u(\sigma)v(\sigma)d\sigma$$



Plan

$E \subset \mathbb{R}^n$ borné. (E est sous-variété de dimension d de $\mathbb{R}^n$)
Soient $u, v \in V(E)$ données, ($V(E) = L^2(E;\mathbb{R})$ par ex.), comment calculer

$$\mathcal{A}(u,v) = \int_E u(\boldsymbol{x})v(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}?$$

ou, plus généralement,

$$\mathcal{A}(u,v) = \int_E \mathcal{D}(u,v)(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$$

avec

- $\mathcal{D}(\bullet, \bullet)$ bilinéaire
- $\mathrm{supp}\,(\mathcal{D}(u,v)) \subset \mathrm{supp}(u) \cap \mathrm{supp}(v)$.

Par exemples,

- $\mathcal{D}(u,v) = u.v$, ($\Rightarrow$ *matrice de Masse*)
- $\mathcal{D}(u,v) = w.u.v$, avec w une fonction poids donnée ($\Rightarrow$ *matrice de Masse avec poids*)
- $\mathcal{D}(u,v) = \frac{\partial u}{\partial x_i}.v$,
- $\mathcal{D}(u,v)(\boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{\nabla}\, u(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{\nabla}\, v(\boldsymbol{x})\rangle$ ($\Rightarrow$ *matrice de Rigidité*)

Episode 1: rappels

- E_h un maillage élémentaire de type d-simplexes de E:
  - $E_h.\mathrm{q}$, `size` $= (n, n_{\mathrm{q}})$; $E_h.\mathrm{me}$, `size` $= (\mathrm{d}+1, n_{\mathrm{me}})$; $E_h.\mathrm{toGlobal}$, `size` $= (1, n_{\mathrm{q}})$
    $\longrightarrow$ avec $n_{\mathrm{q}} = E_h.n_{\mathrm{q}}$, $n_{\mathrm{me}} = E_h.n_{\mathrm{me}}$, $n = E_h.n$, ...
- $V(E_h)$, espace des éléments finis $\mathbb{P}_1$-Lagrange sur E_h :

$$\begin{aligned} V(E_h) &\stackrel{\text{def}}{=} \left\{ v \in \mathcal{C}^0(E_h;\mathbb{R}) \text{ tq } \forall k \in [\![1, n_{\mathrm{me}}]\!],\ v_{|K_k} \in \mathbb{R}_1[X_1,\ldots,X_n] \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left\{ \varphi_1, \ldots, \varphi_{n_{\mathrm{q}}} \right\} \end{aligned}$$

  Les $\varphi_i \in V(E_h)$ vérifient
  - $\varphi_i(\mathrm{q}^j) = \delta_{i,j}, \quad \forall (i,j) \in [\![1, n_{\mathrm{q}}]\!]^2$
  - $\varphi_i \equiv 0$ sur K_k, si $q^i \notin K_k \quad \Rightarrow \quad \mathrm{supp}(\varphi_i) = \bigcup_{\{k \in [\![1,n_{\mathrm{me}}]\!];\ q^i \in K_k\}} K_k$
- Opérateur d'interpolation:

$$\left\{ \begin{array}{cccl} \pi_h & : & V(E) & \longrightarrow & V(E_h) \\ & & w & \longmapsto & \pi_h(w) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n_{\mathrm{q}}} w(q^i)\varphi_i \end{array} \right.$$

Epidodes 1 et 2: medley

Soit K un d-simplexe de $\mathbb{R}^n$ dont les $(\mathrm{d}+1)$ sommets sont les colonnes de q.

- $\mathrm{vol{=}simplex.volume(q)}$ retourne le volume d'un d-simplexe $K \subset \mathbb{R}^n$ dont les $(\mathrm{d}+1)$ sommets sont les colonnes de q
- $\mathrm{G{=}simplex.gradBaCo(q)}$ retourne les gradients des coordonnées barycentriques de K

☞ voir épidode 2

Exo: Soit E_h un maillage élémentaire de type d-simplexes de $E \subset \mathbb{R}^n$. On dispose du tableau de point $\mathrm{q} = E_h.\mathrm{q}$, (n, n_{q}), et du tableau de connectivité $\mathrm{me} = E_h.\mathrm{me}$, $(\mathrm{d}+1, n_{\mathrm{me}})$.

1. Ecrire la fonction Matlab/Octave, $\mathrm{volumes}$, permettant de calculer tous les volumes des d-simplexes de E_h. Cette fonction sera enregistrée dans le répertoire `+FEM`.
2. Ecrire la fonction Matlab/Octave, $\mathrm{gradBaCo}$, permettant de calculer tous les gradients des coordonnées barycentriques de tous les d-simplexes de E_h. On stokera le résultat dans un tableau 3D initialisé par $\mathrm{zeros(nme,d{+}1,dim)}$. Cette fonction sera enregistrée dans le répertoire `+FEM`.

Soient $(u,v) \in V(E)^2$. On pose $u_h = \pi_h(u) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n_{\mathrm{q}}} u(q^i)\varphi_i$ et $v_h = \pi_h(v) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n_{\mathrm{q}}} v(q^i)\varphi_i$ alors

$$\mathcal{A}(u,v) = \int_E \mathcal{D}(u,v)(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} \ \approx\ \mathcal{A}_h(u_h,v_h) = \int_{E_h} \mathcal{D}(u_h,v_h)(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$$

Exo: Montrer que $\mathcal{A}_h(u_h,v_h) = \left\langle \mathbb{A}^h \boldsymbol{U}, \boldsymbol{V} \right\rangle$ où l'on explicitera $\mathbb{A}^h \in \mathcal{M}_{n_{\mathrm{q}}}(\mathbb{R})$, $\boldsymbol{U} \in \mathbb{R}^{n_{\mathrm{q}}}$, et $\boldsymbol{V} \in \mathbb{R}^{n_{\mathrm{q}}}$

- **rappel:** $\mathcal{D}(\bullet,\bullet)$ bilinéaire ...

Comme $\mathcal{A} : V(E) \times V(E) \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\mathcal{A}_h : V(E_h) \times V(E_h) \longrightarrow \mathbb{R}$ sont **bilinéaires**:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_h(u_h,v_h) &= \mathcal{A}_h\left(\sum_{j=1}^{n_{\mathrm{q}}} u(q^j)\varphi_j, \sum_{i=1}^{n_{\mathrm{q}}} v(q^i)\varphi_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n_{\mathrm{q}}} \sum_{j=1}^{n_{\mathrm{q}}} u(q^j)v(q^i)\mathcal{A}_h(\varphi_j,\varphi_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n_{\mathrm{q}}} \left(\sum_{j=1}^{n_{\mathrm{q}}} \underbrace{\mathcal{A}_h(\varphi_j,\varphi_i)}_{\mathbb{A}^h_{i,j}} \underbrace{u(q^j)}_{\boldsymbol{U}_j} \right) v(q^i) \\ &= \sum_{i=1}^{n_{\mathrm{q}}} \left(\mathbb{A}^h\boldsymbol{U}\right)_i \underbrace{v(q^i)}_{\boldsymbol{V}_i} \\ &= \left\langle \mathbb{A}^h\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V} \right\rangle, \quad \mathbb{A}^h \in \mathcal{M}_{n_{\mathrm{q}}}(\mathbb{R}),\ \boldsymbol{U} \in \mathbb{R}^{n_{\mathrm{q}}},\ \boldsymbol{V} \in \mathbb{R}^{n_{\mathrm{q}}} \end{aligned}$$

avec $\mathbb{A}^h_{i,j} = \mathcal{A}_h(\varphi_j,\varphi_i)$, $\boldsymbol{U}_j = u(\mathrm{q}^j)$ et $\boldsymbol{V}_i = u(\mathrm{q}^i)$

Exo: On note $\mathbb{M} \in \mathcal{M}_{n_q}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{K} \in \mathcal{M}_{n_q}(\mathbb{R})$, respectivement les matrices de Masse et de Rigidité, définies par

$$\mathbb{M}_{i,j} = \int_{E_h} \varphi_j(\mathrm{q})\varphi_i(\mathrm{q})d\mathrm{q} \quad \text{et} \quad \mathbb{K}_{i,j} = \int_{E_h} \langle \nabla \varphi_j(\mathrm{q}), \nabla \varphi_i(\mathrm{q})\rangle d\mathrm{q}.$$

Soit $\boldsymbol{W} \in \mathbb{R}^{n_q}$, $W_i = 1$, $\forall i \in [\![1, n_q]\!]$.

1. Montrer que $\langle \mathbb{M}\boldsymbol{W}, \boldsymbol{W}\rangle = |E_h|$.
2. Montrer que $\mathbb{K}\boldsymbol{W} = \boldsymbol{0}$ et $\langle \mathbb{K}\boldsymbol{U}, \boldsymbol{W}\rangle = 0$, $\forall \boldsymbol{U} \in \mathbb{R}^{n_q}$.

- On a $\mathcal{A}_h(u_h, v_h) = \langle \mathbb{A}^h \boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}\rangle$ ...

Exo: Soit $k \in [\![1, n_{\mathrm{me}}]\!]$. Déterminer des conditions sur i et j pour que $\mathcal{D}(\varphi_j, \varphi_j) \equiv 0$ sur K_k.

- $\mathcal{D}(\bullet, \bullet)$ bilinéaire et $\mathrm{supp}\,(\mathcal{D}(u_h, v_h)) \subset \mathrm{supp}(u_h) \cap \mathrm{supp}(v_h)$.
- $\varphi_i \equiv 0$ sur K_k, si $q^i \notin K_k \quad \Rightarrow \quad \mathrm{supp}(\varphi_i) = \bigcup_{\{k \in [\![1, n_{\mathrm{me}}]\!];\ \mathrm{q}^i \in K_k\}} K_k$

Plan

$$\mathcal{D}(\varphi_j, \varphi_j) \equiv 0 \text{ sur } K_k \text{ si } \mathrm{q}^i \notin K_k \text{ ou } \mathrm{q}^j \notin K_k, \qquad E_h = \bigcup_{k=1}^{n_{\mathrm{me}}} K_k, \quad \mathring{K}_r \cap \mathring{K}_s = \emptyset \text{ si } r \neq s,$$

$$\mathbb{A}^h_{i,j} = \mathcal{A}_h(\varphi_j, \varphi_i) = \int_{E_h} \mathcal{D}(\varphi_j, \varphi_i)(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{n_{\mathrm{me}}} \int_{K_k} \mathcal{D}(\varphi_j, \varphi_i)(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$$

Algorithme Naive finite element assembly algorithm (version 1)

```
A^h ← 0
Pour i ← 1 to n_q faire
   Pour j ← 1 to n_q faire
      Pour k ← 1 to n_me faire
         A^h_{i,j} ← A^h_{i,j} + ∫_{K_k} D(φ_j, φ_i)(x) dx
      Fin Pour
   Fin Pour
Fin Pour
```

Algorithme Naive finite element assembly algorithm (version 2)

```
A^h ← 0
Pour k ← 1 to n_me faire
   Pour i ← 1 to n_q faire
      Pour j ← 1 to n_q faire
         A^h_{i,j} ← A^h_{i,j} + ∫_{K_k} D(φ_j, φ_i)(x) dx
      Fin Pour
   Fin Pour
Fin Pour
```

$$\mathcal{D}(\varphi_j,\varphi_j)\equiv 0 \text{ sur } K_k \text{ si } \mathrm{q}^i \notin K_k \text{ ou } \mathrm{q}^j \notin K_k, \qquad E_h=\bigcup_{k=1}^{n_{\mathrm{me}}} K_k, \quad \mathring{K}_r \cap \mathring{K}_s = \emptyset \text{ si } r\neq s,$$

$$\mathbb{A}^h_{i,j}=\mathcal{A}_h(\varphi_j,\varphi_i)=\int_{E_h}\mathcal{D}(\varphi_j,\varphi_i)(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}=\sum_{k=1}^{n_{\mathrm{me}}}\int_{K_k}\mathcal{D}(\varphi_j,\varphi_i)(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$$

Algorithme 2 Naive finite element assembly algorithm (version 2)

$\mathbb{A}^h \leftarrow 0$
Pour $k \leftarrow 1$ to n_{me} **faire**
  Pour $i \leftarrow 1$ to n_{q} **faire**
    Pour $j \leftarrow 1$ to n_{q} **faire**
      $\mathbb{A}^h_{i,j} \leftarrow \mathbb{A}^h_{i,j} + \int_{K_k}\mathcal{D}(\varphi_j,\varphi_i)(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$
    Fin Pour
  Fin Pour
Fin Pour

Algorithme classic finite element assembly algorithm

$\mathbb{A}^h \leftarrow 0$
Pour $k \leftarrow 1$ to n_{me} **faire**
  Pour $\alpha \leftarrow 1$ to $\mathrm{d}+1$ **faire**
    $i \leftarrow \mathrm{me}(\alpha,k)$
    Pour $\beta \leftarrow 1$ to $\mathrm{d}+1$ **faire**
      $j \leftarrow \mathrm{me}(\beta,k)$
      $\mathbb{A}^h_{i,j} \leftarrow \mathbb{A}^h_{i,j} + \int_{K_k}\mathcal{D}(\varphi_j,\varphi_i)(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$
    Fin Pour
  Fin Pour
Fin Pour

Algorithme 3 classic finite element assembly algorithm

$\mathbb{A}^h \leftarrow 0$
Pour $k \leftarrow 1$ to n_{me} **faire**
  Pour $\alpha \leftarrow 1$ to $\mathrm{d}+1$ **faire**
    $i \leftarrow \mathrm{me}(\alpha,k)$
    Pour $\beta \leftarrow 1$ to $\mathrm{d}+1$ **faire**
      $j \leftarrow \mathrm{me}(\beta,k)$
      $\mathbb{A}^h_{i,j} \leftarrow \mathbb{A}^h_{i,j} + \int_{K_k}\mathcal{D}(\varphi_j,\varphi_i)(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$
    Fin Pour
  Fin Pour
Fin Pour

Algorithme classic finite element assembly algorithm with elementary matrices

$\mathbb{A}^h \leftarrow 0$
Pour $k \leftarrow 1$ to n_{me} **faire**
  $\mathbb{A}^e(K_k) \leftarrow \mathrm{ElemMat}(\ldots)$ // $\mathbb{A}^e(K_k)\in\mathcal{M}_{\mathrm{d}+1}(\mathbb{R})$
  Pour $\alpha \leftarrow 1$ to $d+1$ **faire**
    $i \leftarrow \mathrm{me}(\alpha,k)$
    Pour $\beta \leftarrow 1$ to $\mathrm{d}+1$ **faire**
      $j \leftarrow \mathrm{me}(\beta,k)$
      $\mathbb{A}^h_{i,j} \leftarrow \mathbb{A}^h_{i,j} + \mathbb{A}^e_{\alpha,\beta}(K_k)$
    Fin Pour
  Fin Pour
Fin Pour

$$\mathbb{A}^e_{\alpha,\beta}(K_k)=\int_{K_k}\mathcal{D}(\varphi_j,\varphi_i)(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x},$$

avec $i=\mathrm{me}(\alpha,k)$ et $j=\mathrm{me}(\beta,k)$.

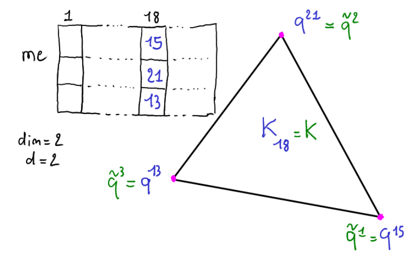
Plan

k fixé. Les $(\mathrm{d}+1)$ sommets de $K=K_k$ sont

$$\tilde{\mathrm{q}}^\alpha=\mathrm{q}(:,\mathrm{me}(\alpha,k)),\ \forall\alpha\in[\![1,\mathrm{d}+1]\!]$$

Les α correspondent à une **numérotation locale des sommets** du d-simplexe K.
Soit $\alpha\in[\![1,d+1]\!]$, $i=\mathrm{me}(\alpha,k)$, on note

$$\tilde{\varphi}_\alpha=\varphi_{i|K_k}.$$



- $\tilde{\varphi}_\alpha : K \longrightarrow \mathbb{R}$ un polynôme de degré 1
- $\tilde{\varphi}_\alpha(\tilde{\mathrm{q}}^\beta)=\delta_{\alpha,\beta},\quad\forall\beta\in[\![1,\mathrm{d}+1]\!]$.

Ce sont donc les **coordonnées barycentriques du d-simplexe K_k** :

$$\tilde{\varphi}_\alpha=\lambda_{\alpha-1},\quad\forall\alpha\in[\![1,\mathrm{d}+1]\!].$$

$$\mathbb{A}^e(K)\in\mathcal{M}_{\mathrm{d}+1}(\mathbb{R}),\quad \mathbb{A}^e_{\alpha,\beta}(K)=\int_K\mathcal{D}(\tilde{\varphi}_\beta,\tilde{\varphi}_\alpha)(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x},\ \forall(\alpha,\beta)\in[\![1,\mathrm{d}+1]\!]^2,$$

$\mathbb{A}^e(K)$ est donc la matrice élémentaire de $\mathcal{D}$ sur K ☞ voir épisode 2!

Plan

Algorithme 4 classic finite element assembly algorithm with elementary matrices

$\mathbb{A}^h \leftarrow 0$
Pour $k \leftarrow 1$ to n_{me} **faire**
  $\mathbb{A}^e(K_k) \leftarrow \mathrm{ElemMat}(\dots)$ // $\mathbb{A}^e(K_k) \in \mathcal{M}_{d+1}(\mathbb{R})$
  Pour $\alpha \leftarrow 1$ to $\mathrm{d}+1$ **faire**
    $i \leftarrow \mathrm{me}(\alpha, k)$
    Pour $\beta \leftarrow 1$ to $\mathrm{d}+1$ **faire**
      $j \leftarrow \mathrm{me}(\beta, k)$
      $\mathbb{A}^h_{i,j} \leftarrow \mathbb{A}^h_{i,j} + \mathbb{A}^e_{\alpha,\beta}(K_k)$
    Fin Pour
  Fin Pour
Fin Pour

On dispose (voir épisode 2) des fonctions

Ae=simplex.MasseElem(d,vol)

et

Ae=simplex.RigiditeElem(vol,G)

permettant de calculer respectivement les matrices élémentaires de Masse et de Rigidité sur un d-simplexe.

Exo:

1. Ecrire les fonctions d'assemblage Masse et Rigidite permettant de calculer respectivement les matrices de Masse et de Rigidité associées à un maillage élémentaire E_h. Ces matrices sont creuses! Ces fonctions seront enregistrées dans le répertoire `+FEM`.
2. Proposer une première approche simple pour tester ces deux fonctions. ☞ voir ep03.test01

Fonctions Matlab/Octave écrites

- FEM.volumes ☞ fichier `volumes.m` dans répertoire `+FEM`
- FEM.gradBaCo ☞ fichier `gradBaCo.m` dans répertoire `+FEM`
- FEM.Masse ☞ fichier `Masse.m` dans répertoire `+FEM`
- FEM.Rigidite ☞ fichier `Rigidite.m` dans répertoire `+FEM`