Ecole d'ingénieurs Sup Galilée
Energétique - Informatique - Instrumentation
Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique
Télécommunications et Réseaux

Ingénieurs MACS 2 - TP F.E.M. (S8)

Eléments finis $\mathbb{P}_1$-Lagrange en dimension $\geqslant 1$: épisode 5

B.V.P. : formulation variationnelle

François Cuvelier

Laboratoire d'Analyse Géométrie et Applications
Institut Galilée
Université Paris XIII.

2024/03/23

B.V.P: Boundary Value Problem (problème aux limites)

Prérequis

- Cours de Mr Vauchelet,

Objectif :

- espaces de Sobolev,
- formulation variationnelle,
- théorème de Lax-Milgram

Bibliographie

[QV08] Alfio M. Quarteroni and Alberto Valli.
Numerical Approximation of Partial Differential Equations.
Springer Publishing Company, Incorporated, 1st ed. 1994. 2nd printing edition, 2008.

problème modèle

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine borné, connexe de frontière, $\partial\Omega$, $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

$$\partial\Omega = \Gamma^D \cup \Gamma^R, \quad \text{avec } \overset{\circ}{\Gamma^D} \cap \overset{\circ}{\Gamma^R} = \varnothing.$$

Trouver $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ suffisament régulière telle que

$$\begin{cases} \eta u - \Delta u = f, & \text{dans } \Omega & (1a)\\ u = g_D, & \text{sur } \Gamma^D & (1b)\\ \dfrac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = g_R, & \text{sur } \Gamma^R & (1c)\end{cases}$$

avec η et α deux réels, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $g_D : \Gamma^D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g_R : \Gamma^R \longrightarrow \mathbb{R}$ donnés.
On choisira, plus tard, correctement ces données pour avoir existence et unicité!

Plan

Définition

Pour tout entier $m \geqslant 0$, on appelle espace de Sobolev d'ordre m sur $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ l'espace

$$\mathrm{H}^m(\Omega) = \left\{ v \in \mathrm{L}^2(\Omega) \ \text{ t.q. } \ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n,\ |\alpha| \leqslant m;\ D^\alpha v \in \mathrm{L}^2(\Omega) \text{ au sens faible} \right\}. \tag{2}$$

avec $D^\alpha v = \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n}}$.

Theorem

Muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{m,\Omega} = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_\Omega D^\alpha u(\mathrm{q}) \overline{D^\alpha v(\mathrm{q})} d\mathrm{q} \tag{3}$$

et de la norme associée

$$\|u\|_{m,\Omega} = \langle u, u \rangle_{\mathrm{H}^m(\Omega)}^{1/2} \tag{4}$$

l'espace $\mathrm{H}^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

On note $|.|_{m,\Omega}$ la semi-norme:

$$|u|_{m,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| = m} \int_\Omega |D^\alpha u(\mathrm{q})|^2 d\mathrm{q} \right)^{1/2} \tag{5}$$

Theorem: Théorème de trace

On suppose que $\mathrm{mes}(\Gamma^D) > 0$. Alors, l'application trace γ_{Γ^D} définie par

$$\begin{array}{rcccl} \gamma_{\Gamma^D} & : & \mathrm{H}^1(\Omega) & \longrightarrow & \mathrm{L}^2(\Gamma^D) \\ & & v & \longmapsto & \gamma_{\Gamma^D}(v) = v_{|\Gamma^D} \end{array} \tag{6}$$

est une application linéaire continue. Il existe donc une constante $C > 0$ telle que

$$\|\gamma_{\Gamma^D}(v)\|_{\mathrm{L}^2(\Gamma^D)} \leqslant C \|v\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)}. \tag{7}$$

On note $\mathrm{H}^{k/2}(\Gamma^D)$, $k \geqslant 1$ l'espace défini par

$$\mathrm{H}^{k/2}(\Gamma^D) = \left\{ v \in \mathrm{L}^2(\Gamma^D) \mid \exists w \in \mathrm{H}^k(\Omega) \ \text{ tel que } \ \gamma_{\Gamma^D}(w) = v. \right\} \tag{8}$$

- Définiton de $\mathrm{H}^1_{0,\Gamma^D}(\Omega)$

$$\mathrm{H}^1_{0,\Gamma^D}(\Omega) = \left\{ v \in \mathrm{H}^1(\Omega) \text{ t.q. } \gamma_{\Gamma^D}(v) = 0 \right\}$$

muni du produit scalaire et de la norme de $\mathrm{H}^1(\Omega)$ $\rightarrow$ **espace de Hilbert.**

- Définiton de $\mathrm{H}^1_{g_D,\Gamma^D}(\Omega)$ avec $g_D \in \mathrm{H}^{1/2}(\Gamma^D)$,

$$\mathrm{H}^1_{g_D,\Gamma^D}(\Omega) = \left\{ v \in \mathrm{H}^1(\Omega) \text{ t.q. } \gamma_{\Gamma^D}(v) = g_D \right\}$$

$\mathrm{H}^1_{g_D,\Gamma^D}(\Omega)$ n'est pas un espace vectoriel!

Plan

$$\begin{cases} \eta u - \Delta u = f, & \text{dans } \Omega \quad (1a) \\ u = g_D, & \text{sur } \Gamma^D \quad (1b) \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = g_R, & \text{sur } \Gamma^R \quad (1c) \end{cases}$$

Espace des fonctions tests:

$$\mathrm{H}^1_{0,\Gamma^D}(\Omega)$$

Soit $v \in \mathrm{H}^1_{0,\Gamma^D}(\Omega)$. On effectue $\int_\Omega (1a).v d\mathrm{q}$ et donc formellement

$$\eta \int_\Omega u.v d\mathrm{q} - \int_\Omega (\Delta u).v d\mathrm{q} = \int_\Omega f.v d\mathrm{q} \tag{10}$$

On prendra $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$.

Theorem 1: Formule de Green

$\forall u \in \mathrm{H}^2(\Omega)$, $\forall v \in \mathrm{H}^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega (\Delta u) v d\mathrm{q} = -\int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v \rangle d\mathrm{q} + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} v d\sigma \tag{11}$$

On a $v \in \mathrm{H}^1_{0,\Gamma^D}(\Omega)$ et

$$\eta \int_\Omega u.v d\mathrm{q} - \int_\Omega (\Delta u).v d\mathrm{q} = \int_\Omega f.v d\mathrm{q} \tag{10}$$

On suppose $u \in \mathrm{H}^2(\Omega)$, et utilise la formule de Green

$$(10) \Leftrightarrow \eta \int_\Omega u.v d\mathrm{q} + \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v \rangle d\mathrm{q} - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} v d\sigma = \int_\Omega f.v d\mathrm{q}$$

De plus, comme $\Gamma = \Gamma_{\mathrm{D}} \cup \Gamma_{\mathrm{R}}$, $\mathring{\Gamma}_{\mathrm{D}} \cap \mathring{\Gamma}_{\mathrm{R}} = \emptyset$, on a

$$\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} v d\sigma = \int_{\Gamma^D} \frac{\partial u}{\partial n} v d\sigma + \int_{\Gamma^R} \frac{\partial u}{\partial n} v d\sigma$$

Comme $v \in \mathrm{H}^1_{0,\Gamma^D}(\Omega)$, on a $\gamma_{\Gamma^D}(v) = 0$,

$$\int_{\Gamma^D} \frac{\partial u}{\partial n} v d\sigma = 0$$

et donc

$$(10) \Leftrightarrow \eta \int_\Omega u.v d\mathrm{q} + \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v \rangle d\mathrm{q} - \int_{\Gamma^R} \frac{\partial u}{\partial n} v d\sigma = \int_\Omega f.v d\mathrm{q}$$

On a $v \in \mathrm{H}^1_{0,\Gamma^D}(\Omega)$ et

$$(10) \Leftrightarrow \eta \int_\Omega u.v d\mathrm{q} + \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v \rangle d\mathrm{q} - \int_{\Gamma^R} \frac{\partial u}{\partial n} v d\sigma = \int_\Omega f.v d\mathrm{q}$$

Or, sur Γ^R, on a la **condition de Robin**:

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = g_R, \quad \text{sur } \Gamma^R, \tag{1c}$$

et donc

$$(10) \Leftrightarrow \eta \int_\Omega u.v d\mathrm{q} + \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v \rangle d\mathrm{q} + \alpha \int_{\Gamma^R} u v d\sigma = \int_\Omega f.v d\mathrm{q} + \int_{\Gamma^R} g_R v d\sigma$$

On prendra $g_R \in \mathrm{L}^2(\Gamma^R)$.
Pour tout u et v dans $\mathrm{H}^1(\Omega)$, on peut définir $\mathcal{A}$ et $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{A}(u,v) \stackrel{\text{def}}{=} \eta \int_\Omega u.v d\mathrm{q} + \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v \rangle d\mathrm{q} + \alpha \int_{\Gamma^R} u v d\sigma$$

$$\mathcal{L}(v) \stackrel{\text{def}}{=} \int_\Omega f.v d\mathrm{q} + \int_{\Gamma^R} g_R v d\sigma$$

$$(1)\begin{cases} \eta u - \Delta u = f, & \text{dans } \Omega \quad (1a) \\ u = g_D, & \text{sur } \Gamma^D \quad (1b) \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = g_R, & \text{sur } \Gamma^R \quad (1c) \end{cases}$$

- $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$, $g_D \in \mathrm{H}^{1/2}(\Gamma^D)$, $g_R \in \mathrm{L}^2(\Gamma^R)$.
- La condition de **Dirichlet** (1b) $\rightarrow$

$$u \in \mathrm{H}^1_{g_D,\Gamma^D}(\Omega)$$

Définition: Formulation variationnelle associée à (1)

$$\begin{cases} \text{Trouver } \ u \in \mathrm{H}^1_{g_D,\Gamma^D}(\Omega) \ \text{ tel que} \\ \quad \mathcal{A}(u,v) = \mathcal{L}(v), \ \forall v \in \mathrm{H}^1_{0,\Gamma^D}(\Omega) \end{cases} \tag{F.V.}$$

avec

$$\mathcal{A}(u,v) \stackrel{\text{def}}{=} \eta \int_\Omega u.v d\mathrm{q} + \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v \rangle d\mathrm{q} + \alpha \int_{\Gamma^R} uv d\sigma$$
$$\mathcal{L}(v) \stackrel{\text{def}}{=} \int_\Omega f.v d\mathrm{q} + \int_{\Gamma^R} g_R v d\sigma$$

Soient $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ et $g_R \in \mathrm{L}^2(\Gamma^R)$.
On définit $\mathcal{A} : \mathrm{H}^1(\Omega) \times \mathrm{H}^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\mathcal{L} : \mathrm{H}^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$\mathcal{A}(u,v) \stackrel{\text{def}}{=} \eta \int_\Omega u.v d\mathrm{q} + \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v \rangle d\mathrm{q} + \alpha \int_{\Gamma^R} uv d\sigma$$
$$\mathcal{L}(v) \stackrel{\text{def}}{=} \int_\Omega f.v d\mathrm{q} + \int_{\Gamma^R} g_R v d\sigma$$

Exo. On suppose $\eta \geqslant 0$ et $\alpha \geqslant 0$.

1. Montrer que $\mathcal{L}$ est linéaire et continue.
2. Montrer que $\mathcal{A}$ est bilinéaire et continue.

☞ A faire à la maison

Plan

Theorem: Lax-Milgram

1. V un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$ de norme $\|.\|_V$.
2. $\mathcal{L}$ une application linéaire et continue de V à valeurs réelles.
3. $\mathcal{A}$ une application bilinéaire et continue de $V \times V$ à valeurs réelles.
4. $\mathcal{A}$ est V-elliptique (coercive sur $V \times V$), c'est à dire qu'il existe une constante $\nu > 0$ telle que
$$\forall v \in V, \quad \mathcal{A}(v,v) \geqslant \nu \|v\|_V^2 .$$

Alors, la formulation variationnelle

$$\begin{cases} \text{Trouver } \ u \in V \ \text{ tel que} \\ \quad \mathcal{A}(u,v) = \mathcal{L}(v), \ \forall v \in V \end{cases}$$

admet une unique solution.

Théorème de Lax-Milgram:

$$\begin{cases} \text{Trouver } \; u \in V \; \text{ tel que} \\ \quad \mathcal{A}(u,v) = \mathcal{L}(v), \; \forall v \in V \end{cases}$$

La formulation variationnelle associée à (1):

$$\begin{cases} \text{Trouver } \; u \in \mathrm{H}^1_{g_D,\Gamma^D}(\Omega) \; \text{ tel que} \\ \quad \mathcal{A}(u,v) = \mathcal{L}(v), \; \forall v \in \mathrm{H}^1_{0,\Gamma^D}(\Omega) \end{cases} \quad \text{(F.V.)}$$

Peut-on utiliser le théorème de Lax-Milgram pour obtenir existence et unicité de (F.V.)?
☞ Pas directement, il va falloir utiliser un relèvement!

$$\begin{cases} \text{Trouver } \; u \in \mathrm{H}^1_{g_D,\Gamma^D}(\Omega) \; \text{ tel que} \\ \quad \mathcal{A}(u,v) = \mathcal{L}(v), \; \forall v \in \mathrm{H}^1_{0,\Gamma^D}(\Omega) \end{cases} \quad \text{(F.V.)}$$

- Relèvement:

$$g_D \in \mathrm{H}^{1/2}(\Gamma^D) \implies \exists R \in \mathrm{H}^1(\Omega), \text{ t.q. } \gamma_{\Gamma^D}(R) = g_D.$$

  Il n'y a **pas unicité du relèvement**! Mais on s'en donne un.
- On pose $w = u - R \in \mathrm{H}^1(\Omega)$. L'application γ_{Γ^D} étant linéaire, on a

$$w \in \mathrm{H}^1_{0,\Gamma^D}(\Omega), \quad \textbf{\textit{w} dépend du choix du relèvement } R$$

- On remplace u par $w + R$ dans (F.V.), le relèvement étant donné, et on utilise la bilinéarité de $\mathcal{A}$:

$$\begin{cases} \text{Trouver } \; w \in \mathrm{H}^1_{0,\Gamma^D}(\Omega) \; \text{ tel que} \\ \quad \mathcal{A}(w,v) = \mathcal{L}(v) - \mathcal{A}(R,v), \; \forall v \in \mathrm{H}^1_{0,\Gamma^D}(\Omega) \end{cases} \quad \text{(F.V.R.)}$$

Soient $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$, $g_R \in \mathrm{L}^2(\Gamma^R)$, $g_D \in \mathrm{H}^{1/2}(\Gamma^D)$ et $R \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ un relèvement de g_D ($\gamma_{\Gamma^D}(R) = g_D$) donné.

$$\begin{cases} \text{Trouver } \; w \in \mathrm{H}^1_{0,\Gamma^D}(\Omega) \; \text{ tel que} \\ \quad \mathcal{A}(w,v) = \mathcal{L}_R(v) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}(v) - \mathcal{A}(R,v), \; \forall v \in \mathrm{H}^1_{0,\Gamma^D}(\Omega) \end{cases} \quad \text{(F.V.R.)}$$

avec

$$\mathcal{A}(u,v) \stackrel{\text{def}}{=} \eta \int_\Omega u.v d\mathrm{q} + \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v \rangle d\mathrm{q} + \alpha \int_{\Gamma^R} u v d\sigma$$

$$\mathcal{L}(v) \stackrel{\text{def}}{=} \int_\Omega f.v d\mathrm{q} + \int_{\Gamma^R} g_R v d\sigma$$

Exo.

1. Sous certaines hypothèses sur η et α, et en utilisant le théorème de Lax-Milgram, montrer que (F.V.R.) admet une unique solution w_R.
2. En déduire que $u = w_R + R$ est l'unique solution de (F.V.).

☞ A faire à la maison

Si u solution de (F.V.) appartient à $\mathrm{H}^1_{g_G,\Gamma^D}(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega)$ alors u est solution de (1).

Exo.

1. On suppose $\Gamma^R = \emptyset$. Trouver la formulation variationnelle associé à (1), ...
2. On suppose $\Gamma^D = \emptyset$. Trouver la formulation variationnelle associé à (1), ...

☞ A faire à la maison